

# ベルヌーイ数と冪乗和の公式

大阪大学 s.t.fake

みなさんはじめまして。大阪大学の s.t.fake と申します。今回はこの関西数学徒の集いで 2 回目の発表の機会を頂いたので、高校の頃数 B で習った「数列」に関連して、ベルヌーイ数と冪乗和の公式についてお話ししたいと思います。

アブストなのにこんな挨拶みだの描くなよーとか思ったそのアナタ！今日くらい力抜いて行きましょ  
じかんがあるかぎり証明とかも補っていきたいのですが、まあ紹介だけで終わってしまう気もしなくもないのでもし興味を持たれた方は自分でちょこちょこ調べて見ることをお勧めいたします。勉学の基本ですね（）

さて今日みなさんにお話するのは、数列で出てきた冪乗和の公式についてです。高校の時は 2 乗くらいまでしか習わなかったかと思いますが、では n 乗はどうなるのでしょうか。実はその公式があるんです。

そのためにまずはベルヌーイ数というものを導入しましょう。ベルヌーイ数とは 1713 年に登場した数で、当時はこの冪乗和の公式に使われていました。今となっては他にも様々な応用がなされています。むしろベルヌーイ数単体が研究対象と言うより、他の分野で事あるごとに出てくる常連さんといった感じでしょうか。リーマンゼータ関数だとか L 関数、p 進測度などの研究をしたことがある方は一度くらいお目にしたことがあるのではないのでしょうか。

## Def : ベルヌーイ数

ベルヌーイ数  $B_n$  を、次の漸化式によって逐次定義する。

$$\sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i} B_i = n+1$$

ここで  $\binom{n+1}{i}$  は二項係数。すなわち  $\binom{n+1}{i} = \frac{(n+1)n(n-1)\dots(n-i+1)}{i!}$

では、このベルヌーイ数を用いて冪乗和の公式を表してみましょう。

## Thm : ベルヌーイの冪乗和公式

$$\sum_{i=1}^k i^n = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} B_j \frac{n^{k+1-j}}{k+1-j}$$

知っている方にはつまらないかもしれませんが、知ってて損はないような気がします。もし教職志望の方がおられれば、生徒に興味を持ってもらえるネタにもなるのではないのでしょうか。

ともかく最後まで楽しんでいただけたなら本望です。ありがとうございました。

誤字脱字、それから無いとは思いますが数学的間違いなどあれば へどうぞ。