2012年3月31日

Gentzenの基本定理と無矛盾性証明へ応用

大原証蔵（@prooftheorist）

**Gentzenの基本定理とは**

* 第一階古典述語計算の形式的体系LKで成り立つ定理：「LKで証明可能な式はすべて，cut freeな（=cutなしの）証明図を持つ．」
* その系としてこの体系の無矛盾性等，いくつかの興味深い結果が得られる．

※ cutは三段論法とも呼ばれる推論図で，いわゆる*modus ponens*(前件肯定式)を拡張したもの．

**subformula property**

* cut freeな証明図は，subformula property（=cut freeな証明図の任意のformulaは，終式のあるformulaのsubformulaになっている）が成り立つため，「見通しのよい」証明図となる．その具体例を示すため，LKの無矛盾性の証明をとりあげる．

**LKの無矛盾性の証明**

* LKで　　　→　　　（空式）が証明可能でないことをいえばよい．そこで，空式が証明可能であるとする．このとき，基本定理によりそのcut freeな証明図がとれる．
* したがって，subformula propertyからその証明図のすべてのformulaは　　　→　　　のformulaのsubformulaになるから，始式*D*→*D*のformulaについても無論そうなる．これは矛盾．□

**subformula property（続き）**

* この例からもわかるように，subformula propertyを充たす証明図は，終式の形からその中のformulaや式等が充たすべき条件がある程度特定できる．

**無矛盾性証明への応用**

このような性質から，基本定理（およびsubformula property）は公理系の無矛盾性の証明に応用される．ここでは，数学的帰納法なしの自然数論の公理系等をその例としてとりあげる．

**基本定理の証明のための準備**

* 推論図 mixture の導入
* 証明図のサイズを示す二つの概念（degreeおよびrank）の定義

**基本定理の証明**

degree(≧0)とrank(≧2)についての二重帰納法．講演においては証明の一部を紹介する．

**参考文献**

[1] 竹内外史・八杉満利子『証明論入門』,共立出版,1989

[2] 倉田令二朗『入門数学基礎論』,河合文化教育研究所,1996