Riesz-Thorinの定理

小鳥遊悠斗（ことりん@kotori_y）

京都大学理学部 B4

2012年3月31日

目次

- Riesz-Thorin の定理
- 三線定理
  - 三線定理の証明
- Riesz-Thorin の定理の証明
- Riesz-Thorin の応用
  - Hausdorff-Young の不等式
  - Young の不等式

Riesz-Thorinの定理

Theorem (Riesz-Thorin)

$1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ を $p_0 \neq p_1, q_0 \neq q_1$ とする．T は $L^{p_0}\left(\mathbb{R}^d\right)$ から $L^{q_0}\left(\mathbb{R}^d\right)$ への有界線形作用素であり，また $L^{p_1}\left(\mathbb{R}^d\right)$ から $L^{q_1}\left(\mathbb{R}^d\right)$ への有界線形作用素でもあって

$$\begin{cases} \|Tf\|_{L^{q_0}} \leq M_0 \|f\|_{L^{p_0}} & \left(\forall f \in L^{p_0}\left(\mathbb{R}^d\right)\right), \\ \|Tf\|_{L^{q_1}} \leq M_1 \|f\|_{L^{p_1}} & \left(\forall f \in L^{p_1}\left(\mathbb{R}^d\right)\right), \end{cases}$$

とする．このとき T は $L^{p_\theta}\left(\mathbb{R}^d\right)$ から $L^{q_\theta}\left(\mathbb{R}^d\right)$ への有界線形作用素で

$$\|Tf\|_{L^{q_\theta}} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_{L^{p_\theta}} \qquad \left(\forall f \in L^{p_\theta}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$$

が成り立つ．但し
$1/p_\theta := (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$, $1/q_\theta := (1-\theta)/q_0 + \theta/q_1$ $\quad (\theta \in (0,1))$ とする．

三線定理

Riesz-Thorin の定理の証明には次の定理を使う.

Theorem (三線定理)

F を $S := \{z = x + iy : 0 \leq x \leq 1\}$ 上で定義された有界な連続関数で, S の内部で正則とする. 任意の $y \in \mathbb{R}$ に対して, 或る M_0, M_1 が存在して

$$\begin{cases} |F(iy)| \leq M_0 \\ |F(1+iy)| \leq M_1 \end{cases}$$

ならば任意の $z = x + iy \in S$ に対して

$$|F(x+iy)| \leq M_0^{1-x} M_1^{x}$$

が成り立つ.

三線定理の証明　（1枚目）

$G(z) = \frac{F(z)}{M_0^{1-z} M_1^z}$ とおくと, 仮定より

$$|G(iy)| \leq 1, |G(1+iy)| \leq 1 \quad (y \in \mathbb{R})$$

である.
また F が有界なので G も有界である.

目標：$|G(z)| \leq 1 \quad (z \in S)$ を示す.

三線定理の証明　（２枚目）

そこで $G_n(z) := G(z)\, e^{\frac{z^2-1}{n}}$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$ とおくと

$$
\begin{aligned}
|G_n(z)| &= \left| G(z)\, e^{\frac{z^2-1}{n}} \right| \\
&= |G(z)|\, e^{\frac{x^2-y^2-1}{n}} \\
&\leq |G(z)|\, e^{-\frac{y^2}{n}} \\
&\to 0 \quad (|y| \to \infty).
\end{aligned}
$$

よって $G_n(z)$ は $0 \leq x \leq 1$ 上で 0 に一様収束する.
故に, 或る $y_0 > 0$ が存在して $|G_n(x+iy)| < 1$ $(|y| \geq y_0)$ である.

三線定理の証明　（３枚目）

また$|G_n(iy)| \leq 1, |G_n(1+iy)| \leq 1$である.
従って最大値の原理より任意の$n \in \mathbb{Z}^+$に対して

$$|G_n(z)| \leq 1 \quad (z \in S)$$

である. ここで$n \to +\infty$とすると$G_n(z) \to G(z)$なので

$$|G(z)| \leq 1 \quad (z \in S)$$

を得る. ■

Riesz-Thorinの定理の証明　（1枚目）

双対公式より

$$\| Tf \|_{L^{q_\theta}} = \sup_{\|g\|_{L^{q'_\theta}} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^d} (Tf)(x)\, g(x)\, dx \right|$$

だから，この右辺を評価すれば良い．
$p_\theta \neq \infty, q_\theta \neq 1$であるので$a_j, b_k > 0$, $\alpha_j, \beta_k \in \mathbb{R}$, A_j, B_kはそれぞれ互いに交わらない有限測度をもつ$\mathbb{R}^d$の部分集合として

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j e^{i\alpha_j} \chi_{A_j}(x) \\ g(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k e^{i\beta_k} \chi_{B_k}(x) \end{cases}$$

としてよい．

Riesz-Thorinの定理の証明　（２枚目）

$$\begin{cases} P(z) = \frac{p_\theta}{p_0}(1-z) + \frac{p_\theta}{p_1} z \\ Q(z) = \frac{q'_\theta}{q'_0}(1-z) + \frac{q'_\theta}{q'_1} z \end{cases}$$

とおき, $\forall z \in S$ **に対して**

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}^d} (Tf_z)(x)\, g_z(x)\, dx$$

とする．ただし,

$$\begin{cases} f_z(x) = \sum_{j=1}^m a_j^{P(z)} e^{i\alpha_j} \chi_{A_j}(x) \\ g_z(x) = \sum_{k=1}^n b_k^{Q(z)} e^{i\beta_k} \chi_{B_k}(x) \end{cases}$$

とする．このとき $f_\theta = f, g_\theta = g$ **であることに注意する**.

Riesz-Thorinの定理の証明　（3枚目）

T の線形性より

$$
\begin{aligned}
F(z) &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(T \sum_{j=1}^{m} a_j^{P(z)} e^{i\alpha_j} \chi_{A_j}(x) \right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^{Q(z)} e^{i\beta_k} \chi_{B_k}(x) \right) dx \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_j^{P(z)} e^{i\alpha_j} b_k^{Q(z)} e^{i\beta_k} \int_{\mathbb{R}^d} \left(T\chi_{A_j} \right)(x)\, \chi_{B_k}(x)\, dx
\end{aligned}
$$

だから $a_j > 0$, $b_k > 0$ より F は S 上正則である.

Riesz-Thorinの定理の証明　（4枚目）

$\mathrm{Re}\, z = 0$のとき，A_jが互いに交わらないことに注意すると

$$\begin{aligned} \|f_z\|_{L^{p_0}}^{p_0} &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \sum_{j=1}^{m} a_j^{P(z)} e^{i\alpha_j} \chi_{A_j}(x) \right|^{p_0} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j=1}^{m} a_j^{p_\theta} \chi_{A_j}(x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^{p_\theta}\, dx = \|f\|_{L^{p_\theta}}^{p_\theta} \end{aligned}$$

となる．同様にして$\|g_z\|_{L^{q_0'}}^{q_0'} = \|g\|_{L^{q_\theta'}}^{q_\theta'}$である．

また$\mathrm{Re}\, z = 1$のときも同様にして$\|f_z\|_{L^{p_1}}^{p_1} = \|f\|_{L^{p_\theta}}^{p_\theta}$, $\|g_z\|_{L^{q_1'}}^{q_1'} = \|g\|_{L^{q_\theta'}}^{q_\theta'}$である．

Riesz-Thorinの定理の証明　（5枚目）

$\mathrm{Re}\, z = 0$のとき, Hölderの不等式より

$$
\begin{aligned}
|F(z)| &\le \|Tf_z\|_{L^{q_0}} \|g_z\|_{L^{q_0'}} \\
&\le M_0 \|f_z\|_{L^{p_0}} \|g_z\|_{L^{q_0'}} \\
&= M_0 \|f\|_{L^{p_\theta}}^{\frac{p_\theta}{p_0}} \|g\|_{L^{q_\theta'}}^{\frac{q_\theta'}{q_0'}} .
\end{aligned}
$$

$\mathrm{Re}\, z = 1$のときも同様にして

$$
|F(z)| \le M_1 \|f\|_{L^{p_\theta}}^{\frac{p_\theta}{p_1}} \|g\|_{L^{q_\theta'}}^{\frac{q_\theta'}{q_1'}} .
$$

Riesz-Thorinの定理の証明　（６枚目）

三線定理より $\mathrm{Re}\, z = \theta$ のとき

$$\begin{aligned} |F(z)| &\le \left(M_0 \|f\|_{L^{p_\theta}}^{\frac{p_\theta}{p_0}} \|g\|_{L^{q'_\theta}}^{\frac{q'_\theta}{q'_0}} \right)^{1-\theta} \left(M_1 \|f\|_{L^{p_\theta}}^{\frac{p_\theta}{p_1}} \|g\|_{L^{q'_\theta}}^{\frac{q'_\theta}{q'_1}} \right)^{\theta} \\ &= M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_{L^{p_\theta}} \|g\|_{L^{q'_\theta}} \end{aligned}$$

従って

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} (Tf)(x)\, g(x)\, dx \right| = |F(\theta)| \le M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_{L^{p_\theta}} \|g\|_{L^{q'_\theta}}$$

だから

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{L^{q_\theta}} &= \sup_{\|g\|_{L^{q'_\theta}} \le 1} \left| \int_{\mathbb{R}^d} (Tf)(x)\, g(x)\, dx \right| \\ &\le M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_{L^{p_\theta}} \end{aligned}$$

単関数近似により一般の関数でも成立する．■

Hausdorff-Youngの不等式

Theorem

$2 \leq p \leq \infty$とする．このとき

$$||\widehat{f}||_{L^p} \leq \|f\|_{L^{p'}}$$

が成り立つ．(ただし$\widehat{f}$はfのフーリエ変換を表す．)

証明

Proof.

$Tf = \widehat{f}$ と定めると, Plancherelの定理より $||\widehat{f}||_{L^2} = \|f\|_{L^2}$ であり, また $||\widehat{f}||_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$ であるので Riesz-Thorin の定理より

$$||\widehat{f}||_{L^p} \leq \|f\|_{L^q}$$

ただし

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{\infty}, \ \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{1}$$

で, θ を消去すると $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を得る. □

Youngの不等式

Theorem

$1 \leq p, q, r \leq \infty$ が $1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$ を満たすとする．このとき任意の $f \in L^p, g \in L^r$ に対して

$$\|f * g\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^r}$$

が成り立つ．

証明

Proof.

$Tf := f * g$とおくと

$$T : L^1 \to L^r \text{で} \|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^r} .$$

また

$$T : L^{r'} \to L^\infty \text{で} \|f * g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^{r'}} \|g\|_{L^r}$$

である．よってRiesz-Thorinの定理より

$$\|f * g\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^r}$$

ただし

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{\infty}, \ \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{r'}$$

で，θを消去すると$1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$を得る． □

ぴよぴよ

ありぴようございました！

ぴよぴよ