Riesz-Thorin の定理

小鳥遊悠斗

本講演では複素関数論とルベーグ積分論の知識を幾分か仮定する. 記号と重要な性質をここに書いておく.

・(最大値の原理) f が有界閉集合 S 上連続で S の内部で正則 $\Rightarrow |f(z)|$ は S の境界上で最大値をとる.

・$L^p = L^p(\mathbb{R}^d) = \left\{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} : \|f\|_{L^p} < \infty \right\} \left(但し \|f\|_{L^p} = \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} & 1 \le p < \infty \\ ess.\sup |f(x)| & p = \infty \end{cases} \right).$

・p' で p の共役指数を表す. すなわち, $1/p + 1/p' = 1$ を満たすものとする. ($1/\infty = 0$ とする.)

・(双対公式)$1 \le p < \infty$ のとき, $\|f\|_{L^p} = \sup_{\|g\|_{L^{p'}} \le 1} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) g(x) \, dx \right|$.

・(Hölder の不等式) $1 \le p_0, p_1, \cdots p_n \le \infty$ で $\frac{1}{p_0} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n}$ のとき, $\|f_1 \cdots f_n\|_{L^{p_0}} \le \|f_0\|_{L^{p_1}} \cdots \|f_n\|_{L^{p_n}}$.

・(Minkowskii の不等式) $1 \le p \le \infty$ のとき, $\left\| \int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) \, dy \right\|_{L^p_x} \le \int_{\mathbb{R}^d} \|f(y)\|_{L^p_x} \, dy$.

・(Fubini の定理) 或る条件下で $\int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) \, dx \right\} dy = \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) \, dy \right\} dx$.

・$\chi_A(x) := 0 \ (x \notin A), \ 1 \ (x \in A)$ を定義関数といい, $f(x) = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{A_j}(x)$ を単関数という.

・$1 \le p < \infty$ とする. $\forall f \in L^p$ に対して $\|f - f_n\|_{L^p} \to 0 \, (n \to \infty)$ となる単関数の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ がある.

・X, Y:Banach 空間とする. $T : X \to Y$ が有界線形作用素 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} T$ が線形写像かつ $\|Tx\|_Y \le M \|x\|_X$.

・(合成積)$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y) g(y) \, dy$.

・$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx$ (f のフーリエ変換) とおくと $||\widehat{f}||_{L^2} = \|f\|_{L^2}$ (Plancherel の定理).

講演では次の Riesz-Thorin の定理を紹介し, その証明と応用について話をする.

定理　(Riesz-Thorin) $1 \le p_0, p_1, q_0, q_1 \le \infty$ を $p_0 \ne p_1, q_0 \ne q_1$ とする. T は $L^{p_0}(\mathbb{R}^d)$ から $L^{q_0}(\mathbb{R}^d)$ への有界線形作用素であり, また $L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$ から $L^{q_1}(\mathbb{R}^d)$ への有界線形作用素でもあって

$$\begin{cases} \|Tf\|_{L^{q_0}} \le M_0 \|f\|_{L^{p_0}} & \left(\forall f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^d) \right), \\ \|Tf\|_{L^{q_1}} \le M_1 \|f\|_{L^{p_1}} & \left(\forall f \in L^{p_1}(\mathbb{R}^d) \right), \end{cases}$$

とする. このとき T は $L^{p_\theta}(\mathbb{R}^d)$ から $L^{q_\theta}(\mathbb{R}^d)$ への有界線形作用素で

$$\|Tf\|_{L^{q_\theta}} \le M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_{L^{p_\theta}} \qquad \left(\forall f \in L^{p_\theta}(\mathbb{R}^d) \right)$$

が成り立つ. 但し $1/p_\theta := (1 - \theta)/p_0 + \theta/p_1, \ 1/q_\theta := (1 - \theta)/q_0 + \theta/q_1 \ (\theta \in (0, 1))$ とする.

この定理は複素補間の定理とも呼ばれる. それは証明に複素関数論 (三線定理) を使用するためである. 一般に補間定理とは二つの評価が得られた時にその間についても評価が得られるという定理のことをいう.

複素解析, ルベーグ積分論の文献を紹介しておく. 詳しい内容はそちらで見られるだろう.

参考文献

[1] L. V. アールフォルス（訳：笠原乾吉）, 『複素解析』, 現代数学社, 1982

[2] 柴田良弘, 『ルベーグ積分論』, 内田老鶴圃, 2006

[3] L. Grafakos, Classical Fourier Analysis, Springer, 2008

[1] は複素関数論, [2] はルベーグ積分論の本である. [3] はフーリエ解析の本で, Riesz-Thorin の定理の証明はこの本に詳しく書かれている.