Stone-Čech compact 化～general topology 入門 (擬)～

山元 不全

概 要

局所 compact な Hausdorff 空間についての compact 化は様々なものが知られている．その最も有名なものは Alexandrov の一点 compact 化であろう．一点 compact 化はある意味で”一番小さい”compact 化である．今回話す Stone-Čech compact 化はそれとは逆にある意味で”一番大きい”compact 化である．

通常,Stone-Čech compact 化は空間上の関数空間を使って構成されるが, 今回はそのように $\mathbb{R}$ (又は $\mathbb{C}$ 等) を使った構成方法ではなく, (特別な場合に) 元の空間から組み合わせ的 (集合論的) に Stone-Čech compact 化を構成する方法を紹介する．

目 次

0　記法と予備知識

ここでは記法の説明と本編を読むのに必要な予備知識の復習をします.

0.0　記法

予備知識を復習しながら, いくつかの記法について解説します.

定義 0.1 (集合)**.** 集合 X について,

- X の部分集合 $A(\subseteq X)$ に対し, $A^c := \{x \in X | x \notin A\}$ を A の X における補集合という.
- X の部分集合族 $\mathcal{U}(\subseteq \mathcal{P}(X))$ に対し, $\bigcup \mathcal{U} := \{x \in X | \exists U \in \mathcal{U}, x \in U\}$ を $\mathcal{U}$ の (X における) 合併という. これを $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ のように書くこともある.
- X の部分集合族 $\mathcal{U}(\subseteq \mathcal{P}(X))$ に対し, $\bigcap \mathcal{U} := \{x \in X | \forall U \in \mathcal{U}, x \in U\}$ を $\mathcal{U}$ の (X における) 共通部分という. これを $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$ のように書くこともある.
- X の部分集合族 $\mathcal{U}(\subseteq \mathcal{P}(X))$ が有限交叉的 (有限交叉性を持つ) とは, 任意の有限部分族 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ について $\bigcap \mathcal{V} \neq \varnothing$ が成り立つこと.

例 0.2. $\mathbb{R}$ 上の開区間の集合 $\{(0, 1/n) | n \in \mathbb{N}\}$ は有限交叉的. $\mathbb{R}$ 上の閉区間の集合 $\{[n, \infty) | n \in \mathbb{N}\}$ も有限交叉的. ただしどちらも全体の共通部分は空集合になることに注意.

定義 0.3 (写像)**.** 集合 X, Y, 部分集合 $A \subseteq X, B \subseteq Y$ 写像 $f : X \to Y$ について

- $f[A] := \{f(a) | a \in A\}$ を A の f に依る像という.
- $f^{-1}[B] := \{x \in X | f(x) \in B\}$ を B の f に依る逆像という.

定義 0.4 (位相, 開集合, 閉集合)**.** 集合 X, 集合族 $\mathcal{O}_X \subseteq \mathcal{P}(X)$ が,

$$X \in \mathcal{O}_X \tag{O.0}$$

$$\text{任意の } A, B \in \mathcal{O}_X \text{ について } A \cap B \in \mathcal{O}_X \tag{O.1}$$

$$\text{任意の } \mathcal{U} \subseteq \mathcal{O}_X \text{ について } \bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{O}_X \tag{O.2}$$

(これを開集合系の公理と言う) をすべて満たすとき,$(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間といい,
$\mathcal{O}_X$ を X の開集合系, $\mathcal{O}_X$ を X の開集合系という. ($\mathcal{O}_X$ はフランス語の Ouvert の略だろう.)

このとき位相空間 $(X,\mathcal{O}_X)$ に対し, $\mathcal{F}_X := \{U^c | U \in \mathcal{O}_X\}$ は,

(F.0) $$\varnothing \in \mathcal{F}_X$$

(F.1) 任意の $A,B \in \mathcal{F}_X$ について $A \cup B \in \mathcal{F}_X$

(F.2) 任意の $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}_X$ について $\bigcap \mathcal{U} \in \mathcal{F}_X$

(これを閉集合系の公理と言う) をすべて満たす.($\mathcal{F}_X$ はフランス語の Fermé の略だろう.) 閉集合系を与えることで位相を決定することもできる.

定義 0.5 (開基, 閉基)**.** 集合 X, 集合族 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ が,

(OB.0) $$\bigcup \mathcal{B} = X$$

(OB.1) 任意の $A,B \in \mathcal{B}$ について $A \cap B \in \mathcal{B}$

(1)

をすべて満たすとき,$\mathcal{B}$ は開基になる, $\{\bigcup \mathcal{U} | \mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}\}$ は開集合系の公理を満たす。

同等に , 集合族 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ が,,

(FB.0) $$\bigcap \mathcal{B} = \varnothing$$

(FB.1) 任意の $A,B \in \mathcal{B}$ について $A \cup B \in \mathcal{B}$

(2)

をすべて満たすとき,$\mathcal{B}$ は閉基になる, $\{\bigcap \mathcal{U} | \mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}\}$ は閉集合系の公理を満たす。

定義 0.6 (近傍系)**.** 位相空間 X に対し, $\mathcal{N} : X \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ を,
$\mathcal{N}(x) := \{N \subseteq X | \exists U \in \mathcal{O}_X, x \in U \subseteq N\}$ と定義すると, 任意の $x \in X$ に対し,

(nbd.0) $$X \in \mathcal{N}(x)$$

(nbd.1) 任意の $N \in \mathcal{N}(x)$ について $x \in N$

(nbd.2) 任意の $N, M \in \mathcal{N}(x)$ について $N \cap M \in \mathcal{N}(x)$

(nbd.3) 任意の $N \in \mathcal{N}(x), M \subseteq X$ について $N \subseteq M \Rightarrow M \in \mathcal{N}(x)$

(nbd.4) 任意の $N \in \mathcal{N}(x)$ について, ある $M \in \mathcal{N}(x)$ が存在し, $\forall y \in M, N \in \mathcal{N}(y)$

(これを近傍系の公理と言う) をすべて満たす. $x \in X$ に対し, $\mathcal{N}(x)$ を x の近傍系, その元を x の近傍という. ($\mathcal{N}$ は neighbourhood の頭文字.)

定義 0.7 (部分空間)**.** X を位相空間とする. このとき, 部分集合 $A \subseteq X$ について,

$$\mathcal{O}_A := \{U \cap A | U \in \mathcal{O}_X\}$$

を A の部分位相といい, $(A, \mathcal{O}_A)$ を (X の) 部分位相空間という.

定義 0.8 (連続, 開写像)**.** X, Y を位相空間とする. このとき, $f : X \to Y$ について,

- f が $x \in X$ で連続とは, 任意の $N \in \mathcal{N}(f(x))$ について $f^{-1}[N] \in \mathcal{N}(x)$ と, なること.
- f が連続 (写像) とは, 任意の $U \in \mathcal{O}_Y$ について $f^{-1}[U] \in \mathcal{O}_X$ と, なること.
- f が開 (写像) とは, 任意の $U \in \mathcal{O}_X$ について $f[U] \in \mathcal{O}_Y$ と, なること.

命題 0.9. X, Y を位相空間とする. このとき, $f : X \to Y$ について, 次は同値.

(0) f は全ての点で連続.

(1) f は連続 (写像).

証明.

(0)⇒(1) $f : X \to Y$ を全ての点で連続な位相空間間の写像とする. このとき $U \in \mathcal{O}_Y$ をひとつ固定. 各 $x \in f^{-1}[U]$ について U は明らかに $f(x)$ の近傍で, f は x で連続なので, $f^{-1}[U]$ は X の近傍. 定義からある $V_x \in \mathcal{O}_X$ が存在し, $x \in V_x \subseteq f^{-1}[U]$. これより $f^{-1}[U] \subseteq \bigcup_{x \in f^{-1}[U]} V_x \subseteq f^{-1}[U]$ となって, $f^{-1}[U] = \bigcup_{x \in f^{-1}[U]} V_x \in \mathcal{O}_X$. よって f は連続.

(1)⇒(0) 自明.

□

0.1 分離公理と compact 性

ここでは分離公理と compact 性について大雑把に復習します. まずは分離公理から.

定義 0.10 (分離公理)**.** 位相空間 X に対し, 以下の性質各々を分離公理という (他にも無数にある).

(T_1)

$x \neq y$ となる任意の $x, y \in X$ について, ある $U \in \mathcal{O}_X$ が存在して, $x \in U, y \notin U$

(T_2)

$x \neq y$ となる任意の $x, y \in X$ について, ある $U, V \in \mathcal{O}_X$ が存在して, $x \in U, y \in V, U \cap V = \varnothing$

(T_3)

$x \notin C$ となる任意の $x \in X, C \in \mathcal{F}_X$ について, ある $U, V \in \mathcal{O}_X$ が存在して, $x \in U, C \subseteq V, U \cap V = \varnothing$

($\mathrm{T}_{3+1/2}$)

$x \notin C$ となる任意の $x \in X, C \in \mathcal{F}_X$ について, ある連続写像 $f : X \to \mathrm{I}$ が存在して, $\mathrm{f(x) = 0,\ f|_C \equiv 1}$

(T_4)

$C \cap D = \varnothing$ となる任意の $C, D \in \mathcal{F}_X$ について, ある $U, V \in \mathcal{O}_X$ が存在して, $C \subseteq U, D \subseteq V, U \cap V = \varnothing$

(ただし, $\mathrm{I} := \{\mathrm{r} \in \mathbb{R} | 0 \leq \mathrm{r} \leq 1\}$)
T_1 が成り立つ空間を T_1 空間, T_2 が成り立つ空間を Hausdorff 空間, T_1 と T_3 が成り立つ空間を正則空間, T_1 と $\mathrm{T}_{3+1/2}$ が成り立つ空間を完全正則空間, T_1 と T_4 が成り立つ空間を正規空間という. (T は Tychonoff の頭文字.)

これら以外にも無数の分離公理が存在する.

命題 0.11. 位相空間が T_1 空間であることと, 任意の一点集合が閉集合となることは同値.

証明. X を T_1 空間とする. このとき $x \in X$ を固定. 各 $y \in X \setminus \{x\}$ に対して $y \in U_y, x \notin U_y$ となる $U_y \in \mathcal{O}_X$ を固定. このとき $U := \cup\{U_y | y \in X \setminus \{x\}\} \in \mathcal{O}_X$ とすると明らかに $U = X \setminus \{x\}$, よって $\{x\} \in \mathcal{F}_X$.
X を任意の一点集合が閉集合となる位相空間とする. このとき $x \neq y$ となる任意の $x, y \in X$ について, $\{y\} \in \mathcal{F}_X$ から $U := X \setminus \{y\}$ とすると, U は $U \in \mathcal{O}_X, x \in U, y \notin U$ を満たす. よって X は T_1.

□

注意 0.12. Haudorff 空間は T_1 空間. 正則空間は Hausdorff 空間. 正規空間は正則空間.
T_1(resp.Hausdorff, 正則) 空間の部分空間は T_1(resp.Hausdorff, 正則).

命題 0.13. 完全正則空間は正則.

証明. X を完全正則空間とする. $x \notin C$ となる $x \in X, C$ を任意に固定. このときある $f : X \to \mathrm{I}$ が存在して, $f(x) = 0,\ f|_C \equiv 1$. この f に対し, $U, V \in \mathcal{O}_X$ を $U := f^{-1}[[0, 0.5)]$, $V := f^{-1}[(0.5, 1]]$ と定めると, 明らかに $x \in U, C \subseteq V, U \cap V = \varnothing$. よって X は正則. □

例 0.14.

- 二点以上を含む密着位相空間は T_1 を満たさないが T_3,T_4 は満たす (閉=開).
- 離散位相空間は正規
- (二点以上を含む) 集合 X に対し, $\mathcal{O}_X := \{U \subseteq X | U^c$: 有限集合又は $U = \varnothing\}$ とすると, $(X, \mathcal{O}_X)$ は T_1 を満たすが Hausdorff にはならない (補有限位相).

命題 0.15. 距離空間は正規.

証明. (X, d) を距離空間とする. このとき $A \cap B = \varnothing$ となる $A, B \in \mathcal{F}_X$ を任意に取って固定. このとき $R_A : X \to \mathbb{R}$ を $R_A(x) := \inf\{\mathrm{d(x,a)} | \mathrm{a} \in \mathrm{A}\}$ と定義する (R_B も同様に定義).
このとき $\forall b \in B, R_A(b) > 0$ を示す.
$b \in B$ をひとつ固定. このとき $b \in A^c$ ($A^c \in \mathcal{O}_X$) から, ある $r > 0$ があって, $B_r(b)(:= \{x \in X | d(x,b) < r\}) \subseteq A^c$ となる. これから, $\forall a \in A, d(b,a) \geq r$ がいえ, 定義より $R_A(b)(\geq r) > 0$.
$U, V \in \mathcal{O}_X$ を $U := \bigcup\{B_r(a) | a \in A, r = \frac{1}{2}R_B(a)\}$, $V := \bigcup\{B_r(b) | b \in B, r = \frac{1}{2}R_A(b)\}$ と定義. このとき $U \cap V = \varnothing$ を示す.
$x \in U \cap V$ を任意にひとつ取る. このとき定義から, ある $a \in A$, $b \in B$ があって, $d(x,a) < \frac{1}{2}R_B(a)$, $d(x,b) < \frac{1}{2}R_A(b)$. 今 $R_A(b) \leq R_B(a)$ を仮定. すると $d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b) < \frac{1}{2}R_B(a) + \frac{1}{2}R_A(b) \leq \frac{1}{2}R_B(a) + \frac{1}{2}R_B(a) \leq R_B(a)$ から $d(a,b) < R_B(a)$ となって $R_B(a)$ の定義に矛盾. 同様に $R_B(a) \leq R_A(b)$ としても矛盾. よって $U \cap V = \varnothing$. 以上より題意は示された. □

系 0.16. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Q}^n$ は正規.

補題 0.17. X を正規空間とする. このとき, $C \subseteq O$ となる $C \in \mathcal{F}_X, O \in \mathcal{O}_X$ に対し, ある $U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{F}_X$ が存在し, $C \subseteq U \subseteq V \subseteq O$ となる.

証明. X を正規空間とし, $C \subseteq O$ となる $C \in \mathcal{F}_X, O \in \mathcal{O}_X$ を固定. このとき $C \cap O^c = \varnothing$, $O^c \in \mathcal{F}_X$ なので, 正規性からある $U, U' \in \mathcal{O}_X$ が存在して, $C \subseteq U$, $O^c \subseteq U'$. 変形すると $C \subseteq U \subseteq U'^c \subseteq U$ となる. よって $V := U'^c \in \mathcal{F}_X$ とすれば. $C \subseteq U \subseteq V \subseteq O$. □

次の定理は位相空間論の初歩として非常によく知られた重要な定理である.

定理 0.18 (Urysohn の補題)**.** X を正規空間とする. このとき, $C \cap D = \varnothing$ となる $C, D \in \mathcal{F}_X$ に対し, ある連続写像 $f : X \to \mathrm{I}$ が存在し, $f|_C \equiv 0$, $f|_D \equiv 1$ となる (ただし, $\mathrm{I} := \{\mathrm{r} \in \mathbb{R} | 0 \leq \mathrm{r} \leq 1\}$).

証明. X を正規空間とし, $C \cap D = \varnothing$ となる任意の閉集合 $C, D \in \mathcal{F}_X$ を固定. このとき, $V(0) := C \in \mathcal{F}_X, U(1) := D^c \in \mathcal{O}_X$ とすると, $V(0) \subseteq U(1)$ が成立. 以下, $FD_2 := \{\frac{m}{2^n} | m, n \in \mathbb{N}, 0 \leq m \leq 2^n\}$ に対し (FD_2 は I で稠密なことに注意),

$$\{U(d) | d \in FD_2\} \subseteq \mathcal{O}_X,\ \{V(d) | d \in FD_2\} \subseteq \mathcal{F}_X$$

を帰納的に,

$$\mathcal{V}(\frac{k}{2^n}) \subseteq U(\frac{2\cdot k+1}{2^{n+1}}) \subseteq V(\frac{2\cdot k+1}{2^{n+1}}) \subseteq U(\frac{k+1}{2^n})$$

となるように取る.
このとき $f : X \to \mathrm{I}$ を $f(x) := \mathrm{inf_I\{d \in FD_2 | x \in U(d)\}}$ と定義する. 明らかに $f|_C \equiv 0$, $f|_D \equiv 1$. 次に f が連続写像であることを示す.
$x \in X$, $d \in FD_2$ に対し

$$f(x) \leq d \Rightarrow x \in U(d),\ d \leq f(x) \Rightarrow x \notin V(d),\ x \in U(d) \Rightarrow f(x) \leq d,\ x \notin V(d) \Rightarrow d \leq f(x)$$

となることに注意.
f が各点で連続であることを言う. そのために $f(x) = 0$, $0 < f(x) < 1$, $f(x) = 1$ の 3 つに場合分けして示す. まず $0 < f(x) < 1$ とする. このとき $N \subseteq \mathrm{I}$ を x の近傍とすると, FD_2 の稠密性から, ある $d_0, d_1 \in FD_2$ があって $d_0 < f(x) < d_1$, $(d_0, d_1) \subseteq N$. このことから $x \in U(d_1) \setminus V(d_0) \in \mathcal{O}_X$. さらに $y \in U(d_1) \setminus V(d_0) \Rightarrow d_0 < f(y) < d_1$ が成り立って, $U(d_1) \setminus V(d_0) \subseteq f^{-1}[N]$ よって $f^{-1}[N]$ は x の近傍であり, f は x で連続. $f(x) = 0$, $f(x) = 1$ の場合も同様. 以上より f は連続写像となり題意は示された. □

系 0.19. 正規空間は完全正則

これから解説する compact 空間は様々な良い性質を持つ空間として非常に重要です.

定義 0.20 (開被覆)**.** 位相空間 X , 開集合族 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{O}_X$ について, $X = \bigcup \mathcal{U}$ となるとき $\mathcal{U}$ を X の開被覆という.

定義 0.21 (compact 空間)**.** 位相空間 X が compact とは,
X の開被覆 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{O}_X$ について, 有限部分族 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ でそれが再び X の開被覆となるものが存在すること.

例 0.22.

- 有限集合は任意の位相で compact.
- 密着位相空間は compact.
- 離散位相空間は有限集合でない限り compact にならない.
- 位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ に対し, $\mathfrak{CC}(\mathcal{O}_X) := \{U \in \mathcal{O}_X | U^c :$ 有限集合又は $U = \varnothing\}$ とすると, $(X, \mathfrak{CC}(\mathcal{O}_X))$ は compact(補 compact 位相).

命題 0.23 (compact 空間の特徴づけ)**.** 位相空間について次は同値,

(0) compact

(1) 有限交叉的な閉集合族の共通部分は空でない.

証明.

(0)⇒(1) X を compact な位相空間とする, このとき $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}_X$ を任意の有限交叉的な閉集合族として, $\bigcap \mathcal{U} \neq \varnothing$ を背理法で示す.
$\bigcap \mathcal{U} = \varnothing$ を仮定. 今 $\mathcal{U}_c := \{U^c | U \in \mathcal{U}\} \subseteq \mathcal{O}_X$ とすると,

$$\bigcup \mathcal{U}_c = \bigcup \{U^c | U \in \mathcal{U}\} = (\bigcap \{U | U \in \mathcal{U}\})^c = (\bigcap \mathcal{U})^c = \varnothing^c = X$$

となって, $\mathcal{U}_c$ は X の開被覆となる. 今 X は compact だからある有限部分族 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}_c$ が存在して, $X = \bigcup \mathcal{V}$ となる. このとき $\mathcal{V}_c := \{V^c | V \in \mathcal{V}\}$ とすると, $\mathcal{V}_c$ は $\mathcal{U}$ の有限部分族であり, $\bigcap \mathcal{V}_c = \bigcap \{V^c | V \in \mathcal{V}\} = (\bigcup \{V | V \in \mathcal{V}\})^c = (\bigcup \mathcal{V})^c = X^c = \varnothing$ これは $\mathcal{U}$ が有限交叉的に矛盾. よって $\bigcap \mathcal{U} \neq \varnothing$.

(1)⇒(0) 同様.

□

続いて部分集合の compact 性に関する事項について説明する.

定義 0.24 (compact 部分集合)**.** 位相空間 X の部分集合 $A \subseteq X$ が compact とは,
$A \subseteq \bigcup \mathcal{U}$ となる任意の開集合族 (これを A の開被覆という) $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{O}_X$ について, $A \subseteq \bigcup \mathcal{V}$ となる有限部分族 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ が存在すること.

定義 0.25 (相対 compact)**.** 位相空間 X の部分集合 $A \subseteq X$ が相対 compact とは, $\overline{A}$ が compact になること.

注意 0.26. 位相空間 X , その部分空間 $Y \subseteq X$ について, Y の部分集合 $A \subseteq Y$ が, Y で compact であることと, X で compact であることは同値.

例 0.27.

- 任意の位相空間で有限集合は compact.
- 離散位相空間上では compact⇔ 有限集合.
- $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合は compact.

このように compact 性はある種の小ささを表している. これについてさらに見ていこう.

命題 0.28. 2 つの compact 集合の合併は compact

証明. A, B を compact 集合とする．このとき $\mathcal{U}$ を $A \cup B$ の開被覆 $(A \cup B \subseteq \bigcup \mathcal{U})$ とする．このとき $\mathcal{U}$ は A, B それぞれの開被覆でもあるので, ある有限部分族 $\mathcal{V}_A, \mathcal{V}_B \subseteq \mathcal{U}$ があって, $A \subseteq \bigcup \mathcal{V}_A$, $B \subseteq \bigcup \mathcal{V}_B$ このとき $\mathcal{V} := \mathcal{V}_A \cup \mathcal{V}_B$ とすると明らかに $\mathcal{V}$ は $\mathcal{U}$ の有限部分族で, $A \cup B \subseteq \bigcup \mathcal{V}$ が成立．よって $A \cup B$ は compact. □

命題 0.29. compact 空間の閉集合は compact.

証明. X を compact な位相空間とする. このとき閉集合 $A \in \mathcal{F}_X$ をひとつ固定. $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{O}_X$ を A の開被覆とする．このとき $\mathcal{U}' := \mathcal{U} \cup \{A^c\}$ とすると $\mathcal{U}'$ は X の開被覆になる．よってある有限部分被覆 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}'$ があって, $X = \bigcup \mathcal{V}$ ．今 $\mathcal{V}' := \mathcal{V} \setminus \{A^c\}$ とすると $\mathcal{V}'$ は $\mathcal{U}$ の有限部分族で, $A \subseteq X \setminus A^c = (\bigcup \mathcal{V}) \setminus A^c \subseteq \bigcup(\mathcal{V} \setminus \{A^c\}) = \bigcup \mathcal{V}'$ となる. 以上より A は compact. □

命題 0.30. Hausdorff 空間の compact 集合は閉集合.

証明. X を Hausdorff 空間とする．このとき compact 集合 $A \subseteq X$ をひとつ取り固定. A が閉集合であることを A^c が開集合であること言って示す. $x \in A^c$ を任意にひとつ固定．このとき X の Hausdorff 性から各 $a \in A$ に対し, $U_a, V_a \in \mathcal{O}_X$ が存在して, $x \in U_a$, $a \in V_a$, $U_a \cap V_a = \varnothing$ となる． これをそれぞれ固定． $A \subseteq \bigcup_{a \in A} V_a$ から $\{V_a | a \in A\}$ は A の開被覆なので, ある $a_0, \cdots, a_{n-1} \in A$ が存在して, $A \subseteq \bigcup_{i=0}^{n-1} V_{a_i}$ ．今 $U, V \mathcal{O}_X$ を $U := \bigcap_{i=0}^{n-1} U_{a_i}$, $V := \bigcup_{i=0}^{n-1} U_{a_i}$ と定義すると, $U \cap V = \varnothing$, $x \in U$, $A \subseteq V$, $U \subseteq V^c \subseteq A^c$ が成立し, x は A^c の内点．よって A^c は開集合であり, A は閉集合. □

系 0.31. Hausdorff 空間の compact 集合の (任意個の) 共通部分は compact

定義 0.32 (局所 compact)**.** 位相空間 X が局所 compact とは,
任意の $x \in X$ に対し, $x \in U$ かつ 相対 compact になる $U \in \mathcal{O}_X$ が存在すること.

局所 compact は次元とも関係する大変重要な性質である.

例 0.33.

- compact 空間は局所 compact.
- 離散位相空間は局所 compact な正規空間.
- $\mathbb{R}^n$ は局所 compact な正規空間

命題 0.34. 位相空間 X について次は同値.

(0) X は Hausdorff.

(1) $C \cap D = \varnothing$ となる任意の compact 集合 $C, D \subseteq X$ について, ある $U, V \in \mathcal{O}_X$ が存在して, $C \subseteq U, D \subseteq V, U \cap V = \varnothing$

証明.

(0)⇒(1) X を Hausdorff 空間とする．$C \cap D = \varnothing$ となる compact 集合 $C, D \subseteq X$ を任意にとり固定．今, 定理 0.30 の証明から, 各 $c \in C$ に対し, ある $U_c, V_c \in \mathcal{O}_X$ があって $c \in U_c$, $D \subseteq V_c$, $U_c \cap V_c = \varnothing$ となる．これをそれぞれ固定．このとき定理 0.30 の証明と同様に, ある $c_0, \cdots, c_{n-1}$ があって, $C \subseteq \bigcup_{i=0}^{n-1} U_{c_i}$ ．今 $U, V \mathcal{O}_X$ を $U := \bigcup_{i=0}^{n-1} U_{c_i}$, $V := \bigcap_{i=0}^{n-1} U_{a_i}$ と定義すると, $C \subseteq U$, $D \subseteq V$, $U \cap V = \varnothing$ が成立, よって (1) が言えた.

(1)⇒(0) 自明 (一点集合は compact). □

系 0.35. compact な Hausdorff 空間は正規空間.

命題 0.36. 局所 compact な Hausdorff 空間は完全正則.

証明. X を局所 compact な Hausdorff 空間とする．$x \notin C$ となる $x \in X, C \in \mathcal{F}_X$ をとり固定. このとき局所 compact からある $U \in \mathcal{O}_X$ が存在して, $x \in U$ かつ, $\overline{U}$ が compact. このとき $D := C \cap \overline{U}$ とすると, $\overline{U}$ は compact かつ Hausdorff なので, 正規であり系 0.19 から, 完全正則. このときある連続写像 $f : \overline{U} \to \mathrm{I}$ が存在して, $f(x) = 0$, $f|_D \equiv 1$ ．今 $F : X \to \mathrm{I}$ を

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in \overline{U}) \\ 1 & (x \in \overline{U}^c) \end{cases}$$

と定義すると, F は連続であり $F(x) = 0, F|_C \equiv 1$ ．よって X は完全正則. □

1 filter

ここでは, 位相空間及び論理において重要な概念である filter について解説する.

1.1 束と filter

まずは束の定義を述べ (良い性質を持つ) 束上での filter を定義し, 基本的な概念について説明する. 特に有限交叉性との関係を見る

定義 1.1 (束)**.** 半順序集合について, 任意の二点集合が上限及び下限を持つとき, その半順序集合を束と言う.
$\mathcal{L}$ が束のとき $\mathcal{L}$ 上の二項演算 $\cup, \cap : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ を $A \cup B := \sup\{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}, \mathrm{A} \cap \mathrm{B} := \inf\{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$ と定義する.
特に全体の最大元, 最小元が存在するとき有界束という.

命題 1.2. $(\mathcal{L}, \leq)$ を束とするとき $\mathcal{L}$ の任意の (空でない) 有限部分集合が上限及び下限を持つ.
(以降束上の有限集合の上限及び下限も $\bigcup, \bigcap$ で書く.)

証明. 束 $(\mathcal{L}, \leq)$ の任意の有限部分集合 $\{a_0, \cdots, a_n\} \subseteq \mathcal{L}$ は上限を持つことを, $n \in N$ に関する帰納法で示す.
(1) $n = 0$ の場合.
$a_0 \in \mathcal{L}$ を任意にひとつ取ると a_0 自身が $\{a_0\}$ の上限.
(n) $\{a_0, \cdots, a_{n-1}\}$ が上限を持つとして, $\{a_0, \cdots, a_n\}$ が上限を持つことを示す.
$b := \bigcup\{a_0, \cdots, a_{n-1}\}$ とする. このとき $b \cup a_n$ が $\{a_0, \cdots, a_n\}$ の上限であることを示す. 定義から, $\forall i \in \{0, \cdots, n-1\}$, $a_i \leq b$, $b, a_n \leq b \cup a_n$. このことから $\forall i \in \{0, \cdots, n\}$, $a_i \leq b \cup a_n$ が成立し $b \cup a_n$ は $\{a_0, \cdots, a_n\}$ の上界.
$x \in \mathcal{L}$ を $\{a_0, \cdots, a_n\}$ の上界とする. このとき x は $\{a_0, \cdots, a_{n-1}\}$ の上界でもあるので, b の定義から, $b \leq x$ さらに $a_n \leq x$ であり結果 $\{b, a_n\}$ の上界となる. これより $b \cup a_n \leq x$ となる. よって $b \cup a_n$ は $\{a_0, \cdots, a_n\}$ の上限. □

定義 1.3 (集合束)**.** 集合 X について $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}(X)$ が,

(T$_1$) $$X, \varnothing \in \mathcal{L}$$

(T$_2$) となる任意の $A, B \in \mathcal{L}$ について, $A \cup B \in \mathcal{L}$

(T$_3$) となる任意の $A, B \in \mathcal{L}$ について, $A \cap B \in \mathcal{L}$

(3)

を満たすとき, $\mathcal{L}$ は有界束となる. これを X 上の集合束と呼ぼう.(ココだけの用語)
特に, $\mathcal{P}(X)$, $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{F}_X$ はそれぞれ集合束.

このように束は冪集合の概念を一般化したものとも思える.

定義 1.4 (有限交叉性)**.** $(\mathcal{L}, \leq, 0, 1)$ (0 は $\mathcal{L}$ の最小元 1 は $\mathcal{L}$ の最大元) を有界束とする.
$\mathcal{L}$ の部分集合 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{L}$ が 有限交叉的 (有限交叉性を持つ) とは任意の有限部分集合 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ について $\bigcap \mathcal{V} \neq 0$ となること.

定義 1.5 (filter)**.** 有界束 $(\mathcal{L}, \leq, 0, 1)$ について, $\mathcal{L}$ の部分集合 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{L}$ が

(fil.0) $$1 \in \mathcal{U}$$

(fil.1) $$\text{任意の } A, B \in \mathcal{U} \text{ について } A \cap B \in \mathcal{U}$$

(fil.2) $$\text{任意の } A \in \mathcal{U}, B \in \mathcal{L} \text{ について } A \leq B \Rightarrow B \in \mathcal{U}$$

(fil.3) $$0 \notin \mathcal{U}$$

を満たとき, $\mathcal{U}$ を filter と言う (実際は filter は任意の半順序集合上で定義される).
filter は有限交叉的.

注意 1.6. $(\mathcal{L}, \leq, 0, 1)$ を有界束とする.
を有限交叉的な部分集合 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{L}$ に対し, $\mathrm{fil}_{\mathcal{L}}(\mathcal{U}) := \{\mathrm{A} \in \mathcal{L} | \exists \mathcal{W} \subseteq \mathcal{U},\ \mathcal{W} : \text{有限集合かつ } \bigcap \mathcal{W} \leq \mathrm{A}\}$ とすると $\mathrm{fil}_{\mathcal{L}}(\mathcal{U})$ は filter, で $\mathcal{U} \subseteq \mathrm{fil}_{\mathcal{L}}(\mathcal{U})$.
各 $a \in \mathcal{L} \setminus \{0\}$ に対して, $\mathrm{fil}_{\mathcal{L}}(\{\mathrm{a}\})$ を a で生成される単項 filter という.

命題 1.7. $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ が有界束 $(\mathcal{L}, \leq, 0, 1)$ 上の filter のとき, $\forall U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}, U \cap V \neq 0$ が成り立てば $\mathcal{U} * \mathcal{V} := \{W | \exists U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}, U \cap V \leq W\}$ は filter で $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U} * \mathcal{V}$.

証明. $\forall U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}, U \cap V \neq 0$ とする.

(fil.0) $1 \in \mathcal{U}$, $1 \in \mathcal{V}$ なので $1 = 1 \cap 1 \in \mathcal{U} * \mathcal{V}$.

(fil.1) $W_0, W_1 \in \mathcal{U} * \mathcal{V}$ とするとき, ある $U_0, U_1 \in \mathcal{U}$, $V_0, V_1 \in \mathcal{V}$ が存在して, $U_0 \cap V_0 \leq W_0$, $U_1 \cap V_1 \leq W_1$ となる. このとき $W_0 \cap W_1 \geq (U_0 \cap V_0) \cap (U_1 \cap V_1) = (U_0 \cap U_1) \cap (V_0 \cap V_1)$ となり, $U_0 \cap U_1 \in \mathcal{U}$, $V_0 \cap V_1 \in \mathcal{V}$ から $W_0 \cap W_1 \in \mathcal{U} * \mathcal{V}$.

(fil.2) 定義から自明.

(fil.3) $\forall U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}, U \cap V \neq 0$ から直ちに.

$U = U \cap 1, V = 1 \cap V$ から $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U} * \mathcal{V}$. □

例 1.8. X を位相空間とする. このとき,

- 任意の $x \in X$ に対して $\{A \in \mathcal{L} | x \in A\}$ をここでは $\mathcal{L}$ 上の x から生成される広義単項 filter と呼ぶ (ただし $\mathcal{L}$ は X 上の集合束).
- 任意の $x \in X$ に対して $\mathcal{N}(x)$ は filter(近傍 filter).
- X が無限集合なら $\{A \in \mathcal{P}(X) | A^c : \text{有限集合}\}$ は $\mathcal{P}(X)$ 上の filter(Fréchet filter という).
- X が無限集合で T_1 なら, Fréchet filter は $\mathcal{O}_X$ 上の filter でもある.
- X が compact でないなら $\{A \in \mathcal{O}_X | A^c : \mathrm{compact}\}$ は $\mathcal{O}_X$ 上の filter.
- X が compact でないなら $\{A \in \mathcal{F}_X | A^c : \text{相対 compact}\}$ は $\mathcal{F}_X$ 上の filter,

このように filter にはある点の周辺 (近傍系の一般化) を表す場合と, 全体に対し充分大きな (補集合が無視出来る) 集合達を表す場合がある. この両者の側面は相互に関係して重要である.

次に filter において最も重要な概念である超 filter について解説する.

定義 1.9 (超 filter)**.** 包含関係で極大な filter を超 filter と言う.

例 1.10. X を位相空間とする. このとき,

- 任意の $x \in X$ に対して $\{A \in \mathcal{P}(X) | x \in A\}$ は $\mathcal{P}(X)$ 上の超 filter.

このように超 filter は (ある意味で) 一点集合と対応しているとみなすことができる.

命題 1.11 (超 filter の存在)**.** 有界束 $(\mathcal{L}, \leq, 0, 1)$ について, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{L}$ が filter のとき,
ある超 filter $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{L}$ が存在して, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$.

証明. $\mathcal{M} := \{\mathcal{V} \subseteq \mathcal{L} | \mathcal{V} : \text{filter かつ } \mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}\}$ とすると $(\mathcal{M}, \subseteq)$ は帰納的順序集合である. このことから Zorn の補題より, 極大元が存在. そのひとつを $\mathcal{V}$ と置けば, $\mathcal{M}$ の定義から $\mathcal{U}$ を含む極大な filter(超 filter) となる. □

定理 1.12 (超 filter の特徴づけ)**.** 有界束 $(\mathcal{L}, \leq, 0, 1)$ 上の filter $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{L}$ について次は同値.

(0) 超 filter

(1) 任意の $V \in \mathcal{L}$ について "$\forall U \in \mathcal{U}, V \cap U \neq 0$" $\Rightarrow$ "$V \in \mathcal{U}$" .

証明.

(0)⇒(1) $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{L}$ を 超 filter とする. 今 $\forall U \in \mathcal{U}, V \cap U \neq 0$ となる $V \in \mathcal{L}$ をひとつ固定. このとき $\mathcal{V} := \{A \in \mathcal{L} | \exists U \in \mathcal{U}, U \cap V \leq A\}$ は filter であり, $V \in \mathcal{V}$ かつ $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ となる. $\mathcal{U}$ は超 filter なので, $\mathcal{V} = \mathcal{U}$ よって $V \in \mathcal{V}$.

(1)⇒(0) $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{L}$ を「任意の $V \in \mathcal{L}$ について "$\forall U \in \mathcal{U}, V \cap U \neq 0$" ⇒ "$V \in \mathcal{U}$" 」を満たす filter とする. このとき $\mathcal{V}$ を $\mathcal{U}$ を含む filter とする. $V \in \mathcal{V}$ をひとつ固定, このとき $\mathcal{V}$ は有限交叉的で, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ なので $\forall U \in \mathcal{U}, V \cap U \neq 0$ が成立. 仮定から $V \in \mathcal{U}$ となる. 結果 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ となり, $\mathcal{U} = \mathcal{V}$. よって $\mathcal{U}$ は超 filter.

□

定理 1.13 (集合束上の超 filter)**.** 集合束 $\mathcal{L}$ 上の超 filter $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{L}$ について次が成立. 任意の $U, V \in \mathcal{L}$ について "$U \cup V \in \mathcal{U}$ ならば $U \in \mathcal{U}$ 又は $V \in \mathcal{U}$" .

証明. $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{L}$ を 超 filter とする. $U \notin \mathcal{U}$ かつ $V \notin \mathcal{U}$ となる $U, V \in \mathcal{L}$ を固定. このとき, 定理 1.12 からある $W, W' \in \mathcal{U}$ が存在し, $U \cap W = V \cap W' = \varnothing$ このとき $(U \cup V) \cap (W \cap W') = \varnothing$ となる. $W \cap W' \in \mathcal{U}$ から $U \cup V \notin \mathcal{U}$ 以上より「任意の $U, V \in \mathcal{L}$ について "$U \cup V \in \mathcal{U}$ ならば $U \in \mathcal{U}$ 又は $V \in \mathcal{U}$"」が言えた. □

定理 1.14 (非単項超 filter の存在)**.** X を位相空間とする. このとき, X が無限集合なら $\mathcal{P}(X)$ に, X が無限集合で T_1 なら $\mathcal{O}_X$ に, X が compact でない局所 compact 空間なら $\mathcal{F}_X$ に,
それぞれ広義単項 filter とならない超 filter が存在.

証明. それぞれについて, $\bigcap \mathcal{U} = \varnothing$ となる filter $\mathcal{U}$ の存在さえ言えればいい (命題 1.11 からそのような filter を含む超 filter が存在. それは広義単項 filter とは成り得ない).
$\mathcal{P}(X)$, $\mathcal{O}_X$ については Fréchet filter を取ればいい.
$\mathcal{F}_X$ について X が compact でない局所 compact 空間なら $\mathcal{U} := \{A \in \mathcal{F}_X | A^c : \text{相対 compact}\}$ が前述の性質を満たすことを示す.
各 $x \in X$ に対し局所 compact からある相対 compact な $U \in \mathcal{O}_X$ が存在し, $x \in U$. このとき $U^c \in \mathcal{U}$ なので $x \notin \bigcap \mathcal{U}$. よって $\bigcap \mathcal{U} = \varnothing$. □

このような非単項超 filter は (ある意味で) 無限遠点と対応していると見なせる.

1.2 filter と位相

ここでは,filter と位相の関わりを見ていこう.

定義 1.15 (filter の収束)**.** 位相空間 X 上の filter $\mathcal{U} \in \mathcal{P}(X)$ と $x \in X$ について, $\mathcal{U}$ が x に収束するとは $\mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{U}$ となること. ただし, $\mathcal{N}(x)$ は x の近傍系. 収束 filter を含む filter は同じ点 (若しくはより多くの点) に収束する.

定義 1.16 (filter の集積点)**.** 位相空間 X 上の filter $\mathcal{U} \in \mathcal{P}(X)$ と $x \in X$ について, x が $\mathcal{U}$ の集積点とは $x \in \bigcap\{\overline{U} | U \in \mathcal{U}\}$ となること. 以下 $\mathrm{ac}(\mathcal{U}) := \bigcap\{\overline{\mathrm{U}} | \mathrm{U} \in \mathcal{U}\}$ とする.

命題 1.17. X を位相空間とする. filter $\mathcal{U}$ と $x \in X$ について次は同値.

(0) x は $\mathcal{U}$ の集積点.

(1) $\mathcal{U}$ と $\mathcal{N}(x)$ を含む filter が存在.

証明.

(0)⇒(1) x を $\mathcal{U}$ の集積点とする. このとき集積点の定義から, 任意の $U \in \mathcal{U}$ について $x \in \overline{U}$ つまり $\forall N \in \mathcal{N}(x), U \cap N \neq \varnothing$. よって $\forall U \in \mathcal{U}, N \in \mathcal{N}(x)$, $U \cap N \neq \varnothing$ となり命題 1.7 から $\mathcal{U} * \mathcal{N}(x)$ は filter で $\mathcal{U}, \mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{U} * \mathcal{N}(x)$.

(1)⇒(0) $\mathcal{U}$ と $\mathcal{N}(x)$ を含む filter が存在するとする. このとき filter は有限交叉的なので, $\forall U \in \mathcal{U}, N \in \mathcal{N}(x)$, $U \cap N \neq \varnothing$ が成立. 特に $\forall N \in \mathcal{N}(x)$, $U \cap N \neq \varnothing$ から $x \in \overline{U}$ となり $x \in \mathrm{ac}(\mathcal{U})$.

□

系 1.18. X を位相空間とする. このとき, filter $\mathcal{U} \in \mathcal{P}(X)$ が $x \in X$ に収束するとき, x は $\mathcal{U} \in \mathcal{P}(X)$ の集積点.

定理 1.19. 位相空間 X について次は同値.

(0) X は Hausdorff.

(1) $\mathcal{P}(X)$ 上の filter について, 収束先は高々一点.

証明.

(0)⇒(1) X を Hausdorff 空間とする. $\mathcal{U} \in \mathcal{P}(X)$ を filter とし, $x, y \in X$ をその収束先とする. このとき $\mathcal{N}(x), \mathcal{N}(y) \subseteq \mathcal{U}$ から $\forall U \in \mathcal{N}(x), V \in \mathcal{N}(y)$, $U \cap V \neq \varnothing$. 今 X は Hausdorff なので $x = y$ よって $\mathcal{U}$ の収束先は高々一点.

(1)⇒(0) X を $\mathcal{P}(X)$ 上の filter の収束先が高々一点にしかならない位相空間とする. 相異なる二点 $x, y \in X$ をとり固定. 今仮に $\forall U \in \mathcal{N}(x), V \in \mathcal{N}(y)$, $U \cap V \neq \varnothing$ とすると, $\mathcal{N}(x) * \mathcal{N}(y)$ がは filter で, $\mathcal{N}(x), \mathcal{N}(y) \subseteq \mathcal{N}(x) * \mathcal{N}(y)$ 収束の定義から, $\mathcal{N}(x) * \mathcal{N}(y)$ は x と y に収束. 前提に矛盾. よって $\exists U \in \mathcal{N}(x), V \in \mathcal{N}(y)$, $U \cap V = \varnothing$ となり, Hausdorff が言えた.

□

定理 1.20 (有向点列 compact)**.** 位相空間 X について次は同値.

(0) X は compact.

(1) 任意の filter についてその filter を含む収束 filter が存在.

証明.

(0)⇒(1) X を compact 空間とする. $\mathcal{U} \in \mathcal{P}(X)$ を filter とする. このとき $\{\overline{U} | U \in \mathcal{U}\}$ は有限交叉的な閉集合なので共通部分は空集合でない, つまり $\mathrm{ac}(\mathcal{U}) \neq \varnothing$. $x \in \mathrm{ac}(\mathcal{U})$ をひとつ固定. このとき命題 acc から $\mathcal{U} * \mathcal{N}(x)$ は $\mathcal{U}$ を含む filter であり x に収束する.

(1)⇒(0) X の任意の filter に対し, その filter を含む収束 filter が存在すると仮定. 今 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}_X$ を有限交叉的な閉集合族とする. $\bigcap \mathcal{U} \neq \varnothing$ を示す
このとき仮定から filter $\mathrm{fil}_{\mathcal{P}(\mathrm{X})}(\mathcal{U})$ を含む収束 filter $\mathcal{V}$ とその収束先 $x \in X$ が存在. $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ から $\mathcal{U} = \{\overline{U} | U \in \mathcal{U}\} \subseteq \{\overline{V} | V \in \mathcal{V}\}$ が成立して, $x \in \mathrm{ac}(\mathcal{V}) \subseteq \bigcap \mathcal{U}$. よって $\bigcap \mathcal{U} \neq \varnothing$. 定理 0.23 から X は compact.

□

このように filter を使っては位相空間についての様々な性質を記述することができる. (連続性なども filter を使って定義することができる.)

ここまでは, 位相空間 X の $\mathcal{P}(X)$ 上の filter の基本的な性質についてみた. 次は $\mathcal{F}_X$ 上の超 filter の基本的な性質を見る.

命題 1.21. X を T_1 空間 とする. このとき $\mathrm{fil}_{\mathcal{F}_\mathrm{X}}(\mathrm{x})$ は, $\mathcal{F}_X$ 上の超 filter .

証明. X を T_1 空間 としする. $x \in X$ をひとつ固定. このとき $\mathcal{U}$ を $\mathrm{fil}_{\mathcal{F}_\mathrm{X}}(\mathrm{x}) \subseteq \mathcal{U}$ となる $\mathcal{F}_X$ 上の filter とすると, $\{x\} \in \mathcal{F}_X$ (T_1 だから) なので, $\{x\} \in \mathcal{U}$ で $\forall U \in \mathcal{U}, U \cap \{x\} \neq \varnothing$ となり $\mathcal{U} \subseteq \mathrm{fil}_{\mathcal{F}_\mathrm{X}}(\mathrm{x})$. よって $\mathrm{fil}_{\mathcal{F}_\mathrm{X}}(\mathrm{x})$ は超 filter □

命題 1.22. X を T_1 空間 $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_X$ を $\mathcal{F}_X$ 上の超 filter とする. このとき $\bigcap \mathcal{U} \neq \varnothing$ なら, ある $x \in X$ が存在して $\mathcal{U} = \mathrm{fil}_{\mathcal{F}_\mathrm{X}}(\mathrm{x})$.

証明. X を T_1 空間 $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_X$ を $\mathcal{F}_X$ 上の超 filter とし, $\bigcap \mathcal{U} \neq \varnothing$ とする. 今 $x \in \bigcap \mathcal{U}$ をひとつ固定. このとき, $\forall U \in \mathcal{U}, x \in U$ から, $\mathcal{U} \subseteq \mathrm{fil}_{\mathcal{F}_\mathrm{X}}(\mathrm{x})$. よって $\mathcal{U} = \mathrm{fil}_{\mathcal{F}_\mathrm{X}}(\mathrm{x})$ ($\mathcal{U}$ は超 filter だから) . □

系 1.23. X を compact T_1 空間 $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_X$ を $\mathcal{F}_X$ 上の filter とする. このとき次は同値.

(0) $\mathcal{U}$ は $\mathcal{F}_X$ 上の超 filter.

(1) ある $x \in X$ があって $\mathcal{U} = \mathrm{fil}_{\mathcal{F}_\mathrm{X}}(\mathrm{x})$.

このように compact な T_1 空間では $\mathcal{F}_X$ 上の超 filter と一点集合は完全に対応している．これは compact 化において鍵となる重要な性質である．

2 Stone-Čech compact 化

ここでは, 初めに compact 化の一般論をしてから,Stone-Čech compact 化を構成する.

2.1 compact 化

定義 2.1 (compact 化)**.** 位相空間 X について, 位相空間 Y と連続写像 $f : X \to Y$ が

- Y は compact.
- $f : X \to f[X]$ は同相写像.
- $f[X]$ は Y で稠密.

を満たとき, (f, Y) を X の compact 化という. 特に Y が Hausdorff 空間のとき (自動的に X も Hausdorff), Hausdorff compact 化という.

例 2.2 (Alexandrov の一点 compact 化)**.** compact でない局所 compact Hausdorff 空間 X について, 集合 $\mathfrak{Al}(X)$ を $\mathfrak{Al}(X) := X \cup \{\infty\}$ と定義する (∞ は X 上に無い勝手な点). このとき $\mathcal{O}_{\mathfrak{Al}(X)} := \mathcal{O}_X \cup \{U \cup \{\infty\} | U \in \mathcal{O}_X, U^c : \text{compact}\}$ とすると $(\mathfrak{Al}(X), \mathcal{O}_{\mathfrak{Al}(X)})$ は compact かつ Hausdorff であり, X からの自然な埋め込みが compact 化になっている.

定義 2.3 (Stone-Čech compact 化)**.** 位相空間 X についての, Hausdorff compact 化 (f, Y) が任意の X の Hausdorff compact 化 (f', Y') に対し, ある連続写像 $\pi : Y \to Y'$ が一意的に存在し $f' = \pi \circ f$.
を満たとき, (f, Y) を Stone-Čech compact 化であるという.