偏微分方程式のお話
解の存在について

小鳥遊悠斗（ことりん@kotori_y）

京都大学理学部（B4）

2012年3月6日

目次

- 偏微分方程式って何？
- 何が問題か？
- 実際のところどうなの？

偏微分方程式って何？

- **偏微分方程式**（Partial Differential Equation）**とは**,

  $\longrightarrow$ **未知関数の偏微分を含む方程式**

Examples

- $\partial_t u - \triangle u = 0$
- $\partial_t^2 u - \triangle u = 0$

ここで

$u(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$; **未知関数**,

$\partial_t := \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_t^2 := \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, $\triangle := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ $(Laplacian)$

とする.

偏微分方程式って何？

- **偏微分方程式**（Partial Differential Equation）**とは**,

  $\longrightarrow$ **未知関数の偏微分を含む方程式**

Examples

- $\partial_t u - \triangle u = 0$ **（熱方程式）**
- $\partial_t^2 u - \triangle u = 0$ **（波動方程式）**

ここで

$u\left(t, x\right) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; **未知関数**,

$\partial_t := \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_t^2 := \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, $\triangle := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ $\left(Laplacian\right)$

とする.

偏微分方程式って何？

その他にも

- Maxwell **方程式**,
- Navier-Stokes **方程式**
- Schrödinger **方程式**,
- Korteweg - de Vries **方程式**,
- Burgers **方程式**,
- Dirac **方程式**,
- Hartree-Fock **方程式**,
- Ginzburg-Landau **方程式**,
- Klein-Gordon **方程式**,

$\vdots$

などなど様々な方程式がある.

偏微分方程式って何？

PDE **は物理現象のモデルを記述する方程式！**

物理現象	$\leftrightarrow$	PDE	（$\leftrightarrow$ 数値解析）
熱の伝導	$\leftrightarrow$	熱方程式	（$\leftrightarrow$ HE の数値計算）

PDE **を数学的に解析することで**, **現象を理解することができる！**
(**それに加えて**, PDE **自身**, **数学的に豊かな性質を持っている**)

何が問題になるのか？

問題　PDE は必ず解をもつか？

何が問題になるのか？

問題　PDE は必ず解をもつか？
$\longrightarrow$ **持つとは限らない！**(Levy **の反例**)

何が問題になるのか？

解の存在しないPDEがある！

Fact (Hans Levy(1957))

$\phi \in C^{\infty}(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ **とする．微分方程式**

$$-\frac{\partial u}{\partial x_1} - \sqrt{-1}\frac{\partial u}{\partial x_2} + 2\sqrt{-1}\left(x_1 + \sqrt{-1}x_2\right)\frac{\partial u}{\partial x_3} = \phi'(x_3) \qquad (1.1)$$

が原点の近傍で C^1 **級の解** $u(x_1, x_2, x_3)$ **をもつならば，** ϕ **は原点の近傍で実解析的でなくてはならない．**

何が問題になるのか？

考えているPDEが解をもつことを確かめなくてはいけない！
＝考えている問題は**適切**か？

具体的には与えられた初期値に対して次を確かめる.

- 解があるか？
- その解は一意に決まるのか？
- 初期値に連続的に依存するか？

この３つが成り立っているとき，そのPDEは**適切**であるという.

実際のところどうなの？

具体的な方程式に対して，適切性について考えてみよう．

Problem

次の斉次熱方程式の初期値問題は解をもつか？

$$\begin{cases} \partial_t u - \triangle u = 0 & (t > 0, x \in \mathbb{R}^n). \\ u(0,x) = u_0(x) & (x \in \mathbb{R}^n). \end{cases}$$

ここで $u(t,x)$:**未知関数**, $\partial_t := \frac{\partial}{\partial t}$, $\triangle := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$;**既知函数とする**.

実際のところどうなの？

実は次の定理が成り立つ.

Theorem

$u_0 \in BC(\mathbb{R}^n)$ とする. 斉次熱方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \partial_t u - \triangle u = 0 & (t > 0, x \in \mathbb{R}^n). \\ u(0,x) = u_0(x) & (x \in \mathbb{R}^n). \end{cases}$$

を満たす u が存在する. ここで
$BC(\mathbb{R}^n) = \{u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \text{有界かつ連続}\}$, $u(t,x)$:未知関数,
$\partial_t := \frac{\partial}{\partial t}$, $\triangle := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$;既知函数とする.

証明の準備

Definitions

- $\hat{u}(\xi) = \mathcal{F}u(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx$ **（フーリエ変換）**
- $\check{u}(x) = \mathcal{F}^{-1}u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi.$ **（逆フーリエ変換）**

Fact

- $\mathcal{F}(f+g) = \mathcal{F}f + \mathcal{F}g$
- $\left(\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f\right)(x) = f(x)$
- $\mathcal{F}\left(\partial_{x_j} f\right)(\xi) = -2\pi i \xi_j \mathcal{F}f(\xi),$

証明の概略

Proof.

斉次熱方程式を x についてフーリエ変換すると

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\hat{u}(t,\xi) + 4\pi^2 |\xi|^2 \hat{u}(t,\xi) = 0 \\ \hat{u}(0,\xi) = \widehat{u_0}(\xi) \end{cases}.$$

これは ξ をパラメータとする t についての常微分方程式とみなせて

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-4\pi^2 t|\xi|^2} \widehat{u_0}(\xi)$$

が解となる．従って逆フーリエ変換を施せば

$$u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-4\pi^2 t|\xi|^2} \mathcal{F}u_0(\xi)\right) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)\, dy.$$

を得られる．これが解となる． □

結論

Theorem

斉次熱方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \partial_t u - \triangle u = 0 & (t > 0, x \in \mathbb{R}^n). \\ u(0, x) = u_0(x) & (x \in \mathbb{R}^n). \end{cases}$$

は

$$u(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)\, dy$$

を解にもつ.

余談：熱方程式の性質

解の具体的な形から次の性質をもつことがわかる.

- **平滑化作用**

  少しでも時間がたつと解は滑らかになる. $(u \in C^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^n))$

- **無限伝播性**

  熱は無限の速さで伝わる. (**初期値** u_0 **のサポートがコンパクトでも**, $u(t,x) \quad (t>0)$ **は** 0 **でない**.)

- **熱の減衰**

  熱は冷めていく. ($\int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x)|\,dx < \infty$ **なら**
  $|u(t,x)| \leq \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x)|\,dx \to 0 \quad (t\to\infty)$)

- **熱量の保存**

  熱の総量は保存する. ($\int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x)|\,dx < \infty$ **なら**
  $\int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x)\,dx$ **である**.)

実際のところどうなの？

では、次の問題はどうか？

Problem

次の非斉次熱方程式の初期値問題は解をもつか？

$$\begin{cases} \partial_t u - \triangle u = f & (t > 0, x \in \mathbb{R}^n). \\ u(0, x) = u_0(x) & (x \in \mathbb{R}^n). \end{cases}$$

ここで $u(t,x)$:**未知関数**, $\partial_t := \frac{\partial}{\partial t}$, $\triangle := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$;**既知函数**, $f(t,x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$;**既知函数とする**.

実際のところどうなの？

実は次の定理が成り立つ.

Theorem

$u_0 \in BC(\mathbb{R}^n),\ f \in BC([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ とし.
$\exists \sigma \in (0,1],\ \exists C > 0\ s.t.\ \forall t, t' \in [0,\infty), \forall x, x' \in \mathbb{R}^n$ に対し
$|f(t,x) - f(t',x')| \le C\left(|t-t'|^{\frac{\sigma}{2}} + |x-x'|^{\sigma}\right)$ とする.
このとき非斉次熱方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \partial_t u - \triangle u = f & (t > 0, x \in \mathbb{R}^n). \\ u(0,x) = u_0(x) & (x \in \mathbb{R}^n). \end{cases}$$

を満たす u が存在する.

証明の準備

$$\begin{cases} \partial_t w - \triangle w = 0 & (t > 0, x \in \mathbb{R}^n). \\ w(0, x) = u_0(x) & (x \in \mathbb{R}^n). \end{cases}$$

の解 w と

$$\begin{cases} \partial_t v - \triangle v = f & (t > 0, x \in \mathbb{R}^n). \\ v(0, x) = 0 & (x \in \mathbb{R}^n). \end{cases}$$

の解 v を足せば

$$\begin{cases} \partial_t (v + w) - \triangle (v + w) = f & (t > 0, x \in \mathbb{R}^n). \\ (v + w)(0, x) = u_0(x) & (x \in \mathbb{R}^n). \end{cases}$$

となり, 求める解となるだろう.

証明の準備

$u_s(t,x) = \frac{1}{(4\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(s,y)\,dy$ **とおくと，これは**

$$\begin{cases} \partial_t u_s - \triangle u_s = 0 & (t > s, x \in \mathbb{R}^n). \\ u_s(s,x) = f(s,x) & (x \in \mathbb{R}^n). \end{cases}$$

の解である． $v(t,x) = \int_0^t u_s(t,x)\,ds$ **とおくと，それは**

$$\begin{cases} \partial_t v - \triangle v = f & (t > 0, x \in \mathbb{R}^n). \\ v(0,x) = 0 & (x \in \mathbb{R}^n). \end{cases}$$

の解となる．

証明の概略

Proof.

つまり，

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= w+v \\
&= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)\,dy \\
&\quad + \int_0^t \left\{ \frac{1}{(4\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(s,y)\,dy \right\} ds
\end{aligned}
$$

が解となる． □

結論

Theorem

非斉次熱方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \partial_t u - \triangle u = f & (t > 0, x \in \mathbb{R}^n). \\ u(0, x) = u_0(x) & (x \in \mathbb{R}^n). \end{cases}$$

は

$$u(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)\, dy + \int_0^t \left\{ \frac{1}{(4\pi (t-s))^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(s, y)\, dy \right\} ds$$

を解にもつ.

注意

Remark

- この例は解が具体的に書けたが，一般には解は具体的に書けない．
- このように足し合わせで解が出てきたのは，線型性があったからである．

展望

- 非線型の場合, 例えば

Example

$p > 1$ とする. 次の非線型熱方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \partial_t u - \triangle u = |u|^{p-1} u & (t > 0, x \in \mathbb{R}^n). \\ u(0, x) = u_0(x) & (x \in \mathbb{R}^n). \end{cases}$$

の解は存在するか？

などについて考えることも重要である.

- また, 解の性質について考える（安定性や漸近挙動など）ことも重要である.

まとめ

- 偏微分方程式にはまず適切性（解は一意に存在して，初期値に連続に依存するか）ということが問題になる．
- 非斉次熱方程式

$$\begin{cases} \partial_t u - \triangle u = f & \left(t > 0, x \in \mathbb{R}^n\right). \\ u\left(0, x\right) = u_0\left(x\right) & \left(x \in \mathbb{R}^n\right). \end{cases}$$

の解は存在する．

ありがとうございました！

ぴよぴよ