Abel 多様体の ABC

keno1728

2012 年 3 月 6 日

これは 2012 年 3 月 6 日に行われた関西すうがく徒のつどいでの発表を後日まとめたものです. 発表時間は 30 分だったので流れで理解してもらおうと意識しました. (が, 実際は主定理を述べるだけで 30 分になってしまいました.) 初学者の方に理解してもらえるように定義をきっちり書くこともできましたが, それには他の数学書を読めばいいと思い, あくまで当日の雰囲気を残してあります.

予備知識は Abel 群, 多様体, 複素函数論の初歩的な知識があれば読めるようにしたつもりです.

基本的な記号: $\mathbb{N}$: 自然数全体 (0 を含む), $\mathbb{Z}$: 整数全体, $\mathbb{R}$: 実数全体, $\mathbb{C}$: 複素数全体.

§1. example

今回のテーマは「良い性質をたくさん持つような対象はそんなにない (が, 美しい理論が作れる)」ということである. そのようなものは色々あるのだが, ここでは

(a) (位相的性質) コンパクト連結[*1]
(B) (複素構造) 複素
(C) (群構造)Lie 群[*2]

を考える.

例を通してこれらの性質を簡単に復習しよう.

複素多様体 (B) とは, 局所的には $\mathbb{C}^n$ の開集合と見做せるもののことである.

厳密には, X が n 次元複素多様体であるとは, 第二可算公理を充たし, 各点 $x \in X$ に対して開集合 $U_x \subset X$ と開集合 $V_x \subset \mathbb{C}^n$ 及び同相写像 (即ち全単射連続写像で逆写像も連続) $\phi_x : V_x \to U_x$ が存在して, 更に次の貼り合わせ条件を充たす: $x, y \in X$ のとき, $\phi_y^{-1} \circ \phi_x : \phi_x^{-1}(U_x \cap U_y) \to \phi_y(U_x \cap U_y)$ は正則写像である. つまり $U_x \cap U_y$ の複素構造が well-defined ということである.

例をあげよう.

(1) $\mathbb{C}^n$ は n 次元複素多様体である.
(2) 二つの $\mathbb{C}$ を $\mathbb{C} \to \mathbb{C}; z \mapsto \frac{1}{z}$ によって貼り合わせたものは 1 次元複素多様体であり, $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ と書き, Riemann 球面と呼ばれる. 複素 1 次元射影空間とも言う.
(3) $n \times n$ 行列の集合 $\mathrm{M}(n, \mathbb{C})$ は $\mathbb{C}^{n^2}$ と同一視することにより複素多様体となる.
(4) $\mathrm{M}(n, \mathbb{C})$ の部分集合 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) = \left\{ A \in \mathrm{M}(n, \mathbb{C}) \;\middle|\; \det A \neq 0 \right\}$ はまた複素多様体と見做せる.

[*1] 連結性はあまり本質的ではないので説明は省略する.
[*2] 本当は (B) と (C) は不可分であるが, ここでは naive に考える.

最初と最後のものは (C) の例にもなっている. $\mathbb{C}^n$ は加法で群 ($\mathbb{C}$ ベクトル空間) となっており, 一方 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ は乗法で群になっている.

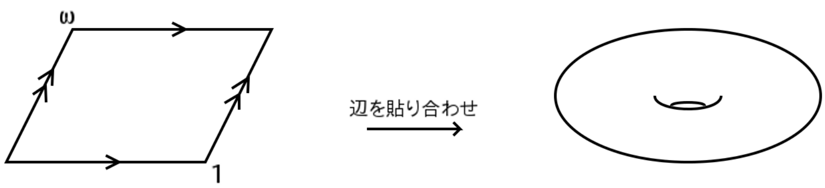
さて, 今回重要な役割をするもう一つの (B) と (C) の例を作ろう. 有限次元 $\mathbb{R}$ ベクトル空間 V の部分群 $\Lambda \subset V$ が格子であるとは, 次の同値な性質*3を充たすことを言う.

(1) Λ は離散部分群であり, かつ V/Λ はコンパクト.
(2) Λ は V の離散部分群であり, V の $\mathbb{R}$ 基底を含む.
(3) Λ は V の基底を含み, その基底により $\Lambda \cong \mathbb{Z}^{\dim V}$.

$V = \mathbb{C}$ の場合を考える. Λ の生成元が z_1, z_2 のとき, $\frac{1}{z_1}$ 倍することにより $1, \omega$ で生成されると思ってよい. $\mathrm{Im}\,\omega = 0$ の場合, 例えば $\omega = \sqrt{2}$ のときを考えてみると, Λ は格子とならない. これは $\mathbb{C}/\Lambda$ が虚軸をそのまま含むから「コンパクト」でないということからもわかる. コンパクト性は説明していなかったが, この様に「無限に伸びていくものを含まない」ことを意味する*4. コンパクト性は屡々「穴がない」と言われる. 実際, (境界付き) 単位円板から原点を除いたもの $\left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, 0 < |z| \le 1 \right\}$ は座標変換 $z \mapsto \frac{1}{z}$ によって $\left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, 1 \le |z| \right\}$ に移るから, コンパクトではない.

以上のことから, $\mathrm{Im}\,\omega > 0$ と思ってよい. このとき $\mathbb{C}/\Lambda$ は次の様な図形になる.

図 1　$\mathbb{C}/\Lambda$



Λ は $\mathbb{C}$ の部分群であったから, 準同型定理によって $\mathbb{C}/\Lambda$ に (加法的な) 群構造が定義される. よって $\mathbb{C}/\Lambda$ はコンパクト連結複素 Lie 群である. これは楕円曲線 (elliptic curve) と呼ばれる. ここまでは 1 次元の場合 ($V = \mathbb{C}$) しか考えなかったが, n 次元の場合 ($V = \mathbb{C}^n$) も同様にコンパクト連結複素 Lie 群となる.

注意 「分類の仕方」によっては ω のとり方によらずに $\mathbb{C}/\Lambda$ の構造は決まってしまう. 位相的には (i.e. 柔らかい分類では) 2 次元トーラス $\mathbb{C}/\Lambda \cong \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ であるが, これらは複素解析的には (i.e. 硬い分類では) 異なる. (異なる複素構造を持つ.) この違いが非常に面白い部分である.

*3 同値性は演習問題とする.
*4 この場合は σ-コンパクトな可微分多様体なので $\mathbb{R}^N$ に埋め込むことができるから, コンパクト $\Longleftrightarrow$ 点列コンパクト (任意の点列は収束部分列を持つ) である.

§2. Main theorem

さて, ここまでで (a)(B)(C) の例を見た. 驚くべきことに, これらの性質を持つものは今見たようなトーラスしか存在しないのである.

Theorem. X をコンパクト連結複素 Lie 群とする. このとき

(i) X は可換群である.

(ii) $X \cong V/\Lambda$ となる有限次元 $\mathbb{R}$ ベクトル空間 V とその格子 Λ が存在する.

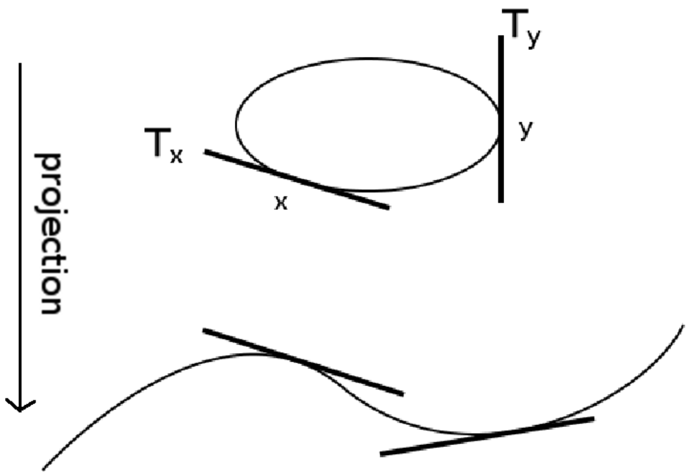
主張はかなり強いことを言っているように見えるが, 証明は鮮やかである. 3 つの性質が上手く組み合わせられていることを味わってほしい.

また, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ は (B)(C) を充たすが可換でないことにも注意しておく.

Proof. まず (i) を示そう. まだ群構造は可換であることはわかっていないので, 演算は $x \cdot y$ の様に積で書く. X の単位元を e と書く.

$x \in X$ とする. 写像 $C_x : X \to X; y \mapsto xyx^{-1}$ を考える. これが e での接空間 $V := T_eX$ に誘導する写像を $\mathrm{ad}(x)\ (= d_eC_x) : V \to V$ で表す. (d_e は e での微分である.)

図 2　微分の例: 実可微分多様体の射影 p の場合. d_xp は正則だが, d_yp は零写像になってしまう.



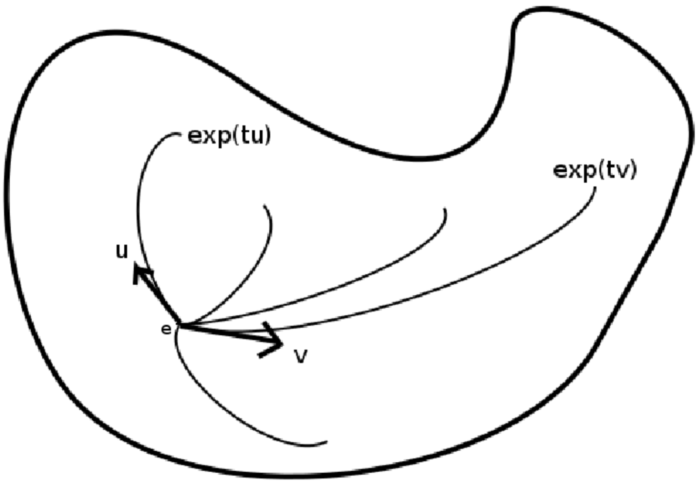
これは自己準同型 (実は同型) であるから $\mathrm{ad}(x) \in \mathrm{End}(V)$ である. 写像 $\mathrm{ad} : X \to \mathrm{End}(V); x \mapsto \mathrm{ad}(x)$ は実は正則写像である. $\mathrm{End}(V) \cong \mathrm{M}(n^2, \mathbb{C})$ は有限次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間であるから, 成分毎に分けて ad_i と書こう. その絶対値 $|\mathrm{ad}_i|$ はコンパクト集合 X 上の連続函数であるから, どこかで最大値を持つ. 最大値の原理から, ad_i が定数であることがわかる. 即ち ad は定値写像である. よって任意の $x \in X$ に対し,

$$\mathrm{ad}(x) = \mathrm{ad}(e) = d_e(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_V$$

となることがわかった.

局所的なデータを得たので，ここから大域的なデータを復元しよう．複素 Lie 群には「群演算に従って接方向に進む写像」$\exp : V \to X$ がある．(図 3) $v \in V$ に対して $\exp_v : \mathbb{C} \to X; t \mapsto \exp(tv)$ を考えたとき，$\varphi = \exp_v$ は準同型で $d_0\varphi(1+0i) = v$ を充たすものとして特徴付けられる．

図 3　exponential map



連結性から exp は全射であることが示せる．よって $y \in X$ に対して $y = \exp(v)$ となる $v \in V$ がある．$d_eC_xv \in V$ なので，$\exp_{d_eC_xv} : \mathbb{C} \to X$ を考えることができる．一方 $\mathbb{C} \to X; t \mapsto C_x(\exp(tv))$ を考えると，exp の一意性から

$$C_x(\exp(tv)) = \exp_{d_eC_xv}(t)$$

がわかる．さて，$d_eC_x = \mathrm{ad}(x) = \mathrm{id}_V$ であったから，

$$C_x(\exp(tv)) = \exp_v(t) = \exp(tv)$$

が成り立つ．特に $t = 1$ とすると，

$$xyx^{-1} = C_x(y) = y$$

となる．即ち，x と y とは可換である．これが全ての $y \in X$ に対して言えるので，X は可換群である．

ここまでくれば (ii) を言うのは難しくない．$\exp : V \to X$ は全射準同型である．($v, u \in V$ に対して $\mathbb{C} \to X; t \mapsto \exp(tv) \cdot \exp(tu)$ は可換性から準同型 $\mathbb{C} \to X$ となるが，exp の一意性からこれは $\exp_{v+u}$ と一致する.) $\Lambda := \ker(\exp)$ とおくと，exp が局所同型なことからこれが離散部分群なことがわかる．商 $V/\Lambda \cong X$ はコンパクトであるから，Λ は格子である．$\square$

§3. この先の話題

性質 (a) を次の性質 (A) で置き換えてみよう．

(A) X は (連結かつ) 射影的である．

射影的とは, 射影空間 $\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$ に閉集合として埋め込めることを言う．

Definitoin. X が性質 (A)-(C) を充たすとき, X を $\mathbb{C}$ 上の Abel 多様体と呼ぶ．

(a) と (A) の差は何なのだろうか? 次の事実から, 射影性から X が代数的なことがわかる．

Fact. **(Chow の補題)** 射影空間 $\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$ の複素閉部分多様体は多項式の零点集合として表せる．

多項式の零点集合として表されることの利点の一つとして, 今まで $\mathbb{C}$ 上の世界で考えていたことを他の体の世界に持っていくことができる, というのがある．例えば方程式 $E : y^2 = x^3 + 1$ を考えよう．これは複素数の世界で見ると $E(\mathbb{C}) = \mathbb{C}/\Lambda$ という図形になる．(楕円曲線!) 今度は有限体 $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p は素数) の世界で見てみる．いくつかの「悪い素数」を除けば, これはまた「$\mathbb{F}_p$ 上の Abel 多様体」となる．こうしてできた図形 $E(\mathbb{F}_p)$ は元の図形 $E(\mathbb{C})$ と深く関わっている．

それでは逆に $\mathbb{F}_p$ 上の「Abel 多様体」X が与えられたとき, それが「可換」であることは示せるのだろうか? その名前が意味するように, 答えは Yes である．実際これは任意の体上で示すことができる．他にも「ドーナッツの形をしていること」など, 色々なことが任意の体で言える．

一般の体 k 上の Abel 多様体 X とは次の様なものである．

(a') k 上 proper な
(C') 群
(B') 多様体[*5].

個々の定義はここでは省略する．ここで大事なことは proper という性質は $\mathbb{C}$ 上ではコンパクト性に対応するものだということである．これは「代数多様体」ということが効いているとも見れるが, やはりこの 3 つの性質が上手く絡み合った結果なのである．

三つの不思議な事実をあげて締めくくろう．

Fact. $\mathbb{C}$ 上 proper だが射影的でない代数多様体が存在する．

Fact. 射影的でないコンパクト連結複素 Lie 群が存在する．

Fact. k 上の Abel 多様体は k 上射影的である．

[*5] variety, 即ち k 上 geometrically integral な有限型分離的 scheme.