Amenability of Groups

榎本　拓実

2012 年 3 月 29 日

本小論は 3/6 に行われた関西すうがく徒のつどいでの講演をまとめた・補足したものです．講演では不変測度に対する問題から従順性という概念を導入し, 従順群の例や従順性の別の特徴付けを紹介し, 最後に従順群の表現論について作用素環論の視点から見ることを通じ従順性が以下に良い性質であるかを理解するを目標としました．講演では用語の説明をほとんどしなかったために何をやっているのかよくわからなかった方も多いかと思うので, 本小論で補完していただけると幸いです.

1 Motivation

$\mathbb{R}$ 上の積分 (Riemann 積分, Lebesgue 積分) の特徴を思い出してみよう．基本的なものとして,

1. 加法性, 線形性: $\int(f+g) = \int f + \int g$
2. 正値性: $f \geq 0 \Rightarrow \int f \geq$
3. 平行移動不変: $\int f = \int f(\cdot + y)$ $(\forall y \in \mathbb{R})$

Riemann 積分と Lebesgue 積分はともにこれらの性質を持つが, 決定的な違いは可算加法性と測度論的構成にある．Riemann 積分は有限加法的であり測度論から構成しないのに対し, Lebesgue 積分は可算加法的で測度論から構成される．では測度論から構成し, かつ有限加法的な積分はどんなものがあるだろうか? そのような疑問は自然であろう.

そこで Lebesgue は 1904 年に以下のような問題を提出した:

測度論的に積分を構築したとき, 上の 3 つの性質で Lebesgue 積分は特徴付けられるか?

これは実際 Banach により否定される．すなわち, Lebesgue 測度でない有限加法的測度が存在することが Banach により示された．このときは全測度が ∞ となるようなものが構成された．更にそののちに全測度が 1 になるようなものが構成された.

一般の局所コンパクト群に対しこの問題を考えてみよう．その場合, 平行移動に対応するものは自然な左作用, Lebesgue 測度に対応するものは Haar 測度である．左不変な可算加法的測度は (正の実数倍を除き)Haar 測度しか存在しない．では有限加法的測度に条件を緩めたらどうか? これが Lebesgue の問題の局所コンパクト群版になる.

「一意性がない」ということは厄介な問題ではあるが, むしろ「コンパクトでないが全測度が 1 である平行移動不変な有限加法的測度が存在する」という点が非常に重要である．局所コンパクト群上のこのような有限加法的測度は, コンパクト群での Haar 測度 (有限群では群の元全体で和をとる) の役割を果たすことが期待されるからである (コンパクト群の表現論は Haar 測度での積分が非常に重要!) 従って, それが存在する群は扱い

やすい"良い"群であると考えられる.

このような性質が, 今回の主題である「群の従順性」である. 従順群は"可換の次に扱いやすい"群であるといわれている.

ここで以下で用いる記号を導入しておこう.

- X を位相空間としたとき, X の開集合全体で生成される σ-加法族を $\mathcal{B}(X)$ と書く. 以下, 測度は常に $\mathcal{B}(X)$ 上の測度とする.
- G を局所コンパクト群としたとき, その上の Haar 測度 (左不変測度) の一つを λ とする. 上述のようにこれは正の実数倍を除きただ一つ存在する.
- $1 \leq p < \infty$ に対し, $L^p(G) = \{f : G \to \mathbb{C}, 可測, \int_G |f|^p \mathrm{d}\lambda < \infty\}$ とする. これは L^p-ノルム $\|f\|_p = (\int_G |f|^p \mathrm{d}\lambda)^{\frac{1}{p}}$ により Banach 空間になる. ただしほとんどいたる所 0 である関数の差を無視する.
- $L^\infty = \{\phi : G \to \mathbb{C}, 可測, \mathrm{ess.sup}_{x\in G}|\phi| < \infty\}$ とする. ここで $\mathrm{ess.sup}_{x\in G}\phi = \inf\{\sup_{x\in G\setminus N}\phi(x) : N \text{ は locallynull}\}$ であり, ϕ の本質的上限と呼ぶ. 右辺の inf と sup を入れ替えて得られる値を本質的下限と呼び, $\mathrm{ess.inf}_{x\in G}\phi$ と書く. N が *locally null* とは N が可測かつ任意のコンパクト集合 $C \subset G$ に対し $\lambda(N \cap C) = 0$ であることをいう. これは L^∞-ノルム $\|\phi\|_\infty = \mathrm{ess.sup}_{x\in G}|\phi|$ により Banach 空間になる. ただしほとんどいたる所 0 である関数の差を無視する.
- 可算離散群 G の Haar 測度は数え上げ測度 $\lambda(E) = (E \text{ の元の個数})$ である. このときは $1 \leq p \leq \infty$ に対し $l^pG = L^p(G)$ と書く.

2 Amenability

従順性を定義するために, まず関数空間の双対性を思い出そう. X を Banach 空間としたとき, X 上の連続線形汎関数全体を X^* と書き, X の双対空間と呼ぶ.

Proposition 1. $L^1(G)^* \cong L^\infty(G)$
$L^\infty(G)^* \cong \{(G, \mathcal{B}(G)) \text{ 上の有限加法的複素数値測度 }\}$
$L^1(G) \hookrightarrow L^\infty(G)^* \cong L^1(G)^{**}$

従って上で述べた問題は, $L^\infty(G)$ 上の線形汎関数で適当な条件を満たすものの存在性に帰着される. ここでその適当な条件を定式化しよう. まず"測度"というからには正値の関数に対し正の値を返すような線形汎関数であってほしい. また全測度が有限であるものを考え, 特に全測度は 1 になるよう正規化したい. まずはこれらの条件を定めよう.

$\phi \in L^\infty(G)$ に対し, $\mathrm{ess.inf}_{x\in G}\phi \geq 0$ であることを $\phi \geq 0$ と書く. $m \in L^\infty(G)^*$ が $m(\phi) \geq 0 (\forall \phi \in L^\infty(G))$ と $m(1) = 1$ を満たすとき, m は $L^\infty(G)$ 上の *mean* であるという.

以下我々の考えるべきものは mean である. 次にこの mean に対する"平行移動不変性"を定式化しよう. 上の命題の中の空間はそれぞれ次のような自然な G の作用を持つ:

$$\begin{aligned}
G \curvearrowright L^1(G), &\qquad xf(y) = f(x^{-1}y),\\
L^\infty(G) \curvearrowleft G, &\qquad \phi x(y) = \phi(xy),\\
G \curvearrowright L^\infty(G)^*, &\qquad xm(\phi) = m(\phi x),
\end{aligned}$$

ここで $x, y \in G$, $f \in L^1(G)$, $\phi \in L^\infty(G)$, $m \in L^\infty(G)^*$. これらの作用はそれぞれ左, 右, 左作用となる. $m \in L^\infty(G)^*$ を測度と思うと, "平行移動不変性"は上の作用での不変性として捉えられる. 左不変な mean はコンパクト群での Haar 測度の役割を果たし, 存在すれば群の解析は非常にやりやすくなると期待できる.

Definition 1. G が従順であるとは, $L^\infty(G)$ 上の左不変な mean が存在することをいう.

一般に左不変な mean が存在するとは限らず, むしろそのような群は多く存在する. 例えば階数 2 の自由群 F_2 は従順でなく, 更に F_2 を部分群として含む群は全て従順でない. このような群の解析は興味深いものではあるが, ここではこれ以上触れないことにしよう.

さて従順性なる性質を定義したが, 従順群の例, あるいはこのクラスの大きさは疑問に思うところだろう. まず具体例をいくつか挙げよう. $\mathcal{P}(G)$ を $L^\infty(G)$ 上の mean 全体とする. Banach-Alaoglu の定理より, これは汎弱位相でコンパクトであるとわかる.

Example 1. 有限群, コンパクト群は従順.
実際, Haar 測度での積分が左不変な mean になる ($L^\infty \subset L^1$に注意!)

Example 2. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ は従順.

Proof. $G = \mathbb{Z}$ を考える. Cesàro 和 $f_n = \frac{1}{2n+1}\sum_{r=-n}^{n}\delta_r$ を考える. $f_n \in l^1\mathbb{Z}$. $\phi \in l^\infty\mathbb{Z}$, $s \geq 0$ に対し

$$
\begin{aligned}
|\hat{f}_n(\phi s) - \hat{f}_n(\phi)| &= |\frac{1}{2n+1}\sum_{r=-n}^{n}(\phi(r+s) - \phi(r)| \\
&= |\frac{1}{2n+1}(-\sum_{r=-n}^{-n+s-1}\phi(r) + \sum_{r=n+1}^{n+s}\phi(r)| \\
&\leq \frac{2s}{2n+1}\|\phi\| \to 0 \ \text{ as } \ n \to \infty.
\end{aligned}
$$

$\{\hat{f}_n\} \subset \mathcal{P}(G)$ であり, $\mathcal{P}(G)$ は汎弱コンパクトだから $\{\hat{f}_n\}$ の集積点は左不変な mean になる.
$G = \mathbb{R}$ では $f_n = \frac{1}{2n}\chi_{[-2n,2n]}$ を考えれば同様にして示せる. $\square$

Example 3. $S_2 = \mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}_{>0}$ とおく. ここで $\mathbb{R}_{>0} = (0, +\infty)$. これは $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}_{>0}$ の半直積と呼ばれるもので, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$ を二項演算 $(b, a) \cdot (b', a') = (b + ab', aa')$ により群とみなしたものである. 特にこの群は"$ax + b$"群と呼ばれる. $\mathbb{R}$ 上の affine 変換で向きを保つもの全体は S_2 と一致するためにこのように呼ばれる. この群の Haar 測度は $\lambda = \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}$ である. A_n を $(-1, \frac{1}{n})$, $(1, \frac{1}{n})$, (n, n^2), $(-n, n^2)$ を頂点に持つ台形の内部とし, $f_n = \frac{1}{\lambda(A_n)}\chi_{A_n}$ とすれば, $\{\hat{f}_n\}$ の集積点が左不変 mean になる. 実際, $\lambda(xA_n \triangle A_n)/\lambda(A_n) \to 0$ as $n \to \infty$ となるからである.

これらの例では, 全て測度ゼロでない集合の列 $\{A_n\}$ で $\lambda(xA_n \triangle A_n)/\lambda(A_n) \to 0$ となるものの存在, つまり平行移動したときの"ずれ"が集合を大きくすると十分小さくできるような状況がポイントだった. 実はこれが従順性を理解する上で重要なものになる.

Definition 2. G が *Følner* 条件を満たすとは, 任意の $\varepsilon > 0$ と G のコンパクト集合 C に対し, ある測度ゼロでないコンパクト集合 $K \subset G$ が存在し, $\lambda(xK \triangle K)/\lambda(K) < \varepsilon \ (\forall x \in C)$ が成り立つことをいう.

Følner 条件は, C の元で"ほとんど不変な"測度ゼロでないコンパクト集合の存在を述べている. 実は, 次が成り立つのである.

Theorem 1. G が従順であることと Følner 条件を満たすことは同値.

これは従順性の本質の 1 つを表している. すなわち, 従順性とは"良い近似性"である.

Følner 条件は測度論的な, あるいは $L^\infty(G)^*$ という非常に大きな空間に対するものであるためにしばしば扱いづらい. 別の特徴付けとして, $L^1(G)$ への作用に注目したものがある. 本質的には, 上で挙げた例での $\{f_n\}$ に注目したものである.

Definition 3. G が *Reiter* 条件を満たすとは, あるネット $\{f_\alpha\} \in L^1(G)$ が存在し, $\hat{f}_\alpha \in \mathcal{P}(G)$ $(\forall \alpha)$ かつ $\|xf_\alpha - f_\alpha\| \to 0$ $(\forall g \in G)$ を満たすことをいう.

ここでネットとは"点列"の概念の一般化である. 詳しくは Kelley[2] を参照.

Proposition 2. G が従順であることと Reiter 条件を満たすことは同値.

このように従順性は調和解析 (群上の関数空間の研究) の立場からも重要なクラスである. 調和解析, 特に Fourier 理論と深く関係する特徴付けも紹介しておこう. Fourier 解析における Fejèr の定理の重要さを考えると, 従順性は特に非可換調和解析 (非可換群での Fourier 理論) において重要な役割を果たすことがお分かりいただけるかと思う.

Theorem 2. G を可算離散群とする. このとき, 次は同値*:*

1. G は従順,
2. G 上の有限台を持つ正定値関数 φ_n の列で定数関数 1 に各点収束するものが存在.

ここで可算離散群 G 上の関数 φ が有限台を持つとは, 有限個の $g \in G$ を除き $\varphi(g) = 0$ であることをいう. また φ が正定値とは, G 上の任意の有限台を持つ関数 f に対し $\sum_{g\in G} \varphi(x^{-1}y)\overline{f(x)}f(y) \geq 0$ が成り立つことをいう.

後半の条件が Fejèr の定理である. 実際 Fejèr 核を ξ_n とすると, その Fourier 変換は $\hat{\xi_n}(k) = (1 - \frac{k}{n}) \vee 0$ である.

ここまでで従順群の例と, その例から導かれる同値な条件を紹介した. 以下本節ではこのクラスの大きさについて考えよう. まずはどのようなクラスの群が従順群のクラスに含まれるかを見てみよう.

Proposition 3. 可換群は従順.

Proof. Markov-Kakutani の不動点定理より明らか. □

Definition 4. G が多項式増大度を持つとは, 単位元の任意のコンパクト近傍 C に対しある多項式が存在し任意の自然数 n に対し $\lambda(C^n) \leq p(n)$ が成り立つことをいう. ここで $C^n = \{g_1 \cdots g_n : g_1, \ldots, g_n \in C\}$.

ちなみに自然数に 0 を含むか否かはここでは問題にしない (しなくてよい). 多項式増大度を持つ群も興味深い性質を持ち, しかもかなり大きいクラスである. 詳細は [4] を参照.

Proposition 4. 多項式増大度を持つ群は従順.

Proof. Reiter 条件. □

また定義からもこのクラスはいくつかの操作で閉じていることが想像できる.

Proposition 5. 離散群に対し, 従順性は

1. 部分群,
2. 商群,
3. 群の拡大 ($H \triangleleft G$ で, H, G/H が従順ならば G も従順), 特に半直積,
4. 帰納極限

で閉じている.

3 Representation theory of amenable groups

冒頭で従順群は「可換の次に良い群」であると述べたが, 実際にどのような点でのだろうか? 本節では群の表現から自然に得られる作用素環を考え, 群の性質と作用素環の性質の対応について紹介する. このような形により群を「函数解析的」に研究することが可能になる.

以下, Γ を可算離散群とする.

まず作用素環について解説する. 作用素環論で C^*-環と von Neumann 環という 2 つのクラスが主な研究対象となる. 主なテキストとして [1], [3], [5] を挙げておこう.

Definition 5. A が Banach 空間でありかつ積を持ち, $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ $(\forall a, b \in A)$ が満たされるとき A は Banach 環であるという. 更に共役線形な写像 $a \mapsto a^*$ が $a^{**} = a$, $(ab)^* = b^*a^*$ を満たす共役線形な写像を対合 (involution) と呼び, involution をもつ Banach 環で $\|a^*\| = \|a\|$ を満たすものを Banach $*$-環という.

Definition 6. A を Banach 環とする. この空間でのノルムが $\|a^*a\| = \|a\|^2$ を満たすとき A は C^*-環であるという. このようなノルムを C^*-ノルムと呼ぶ. M を Hilbert 空間 H に作用する (つまり $M \subset \mathbb{B}(H)$)C^*-環とする. M が弱位相で閉じているとき, M は von Neumann 環であるという. ここで弱位相はセミノルムの族 $\{(\mathbb{B}(H) \ni a \to | < a\xi, \eta > |) : \xi, \eta \in H\}$ で定める位相である.

$\mathbb{C}\Gamma$ を Γ 上の有限台を持つ関数全体とする. $g \in \Gamma$ に対し δ_g を g で 1, それ以外で 0 となる関数とすると, $\mathbb{C}\Gamma$ は $\{\delta_g : g \in \Gamma\}$ を基底に持つ. 更に $\mathbb{C}\Gamma$ は $\delta_g\delta_h = \delta_{gh}$, ${\delta_g}^* = \delta_{g^{-1}}$ により $*$-algebra になる.

Definition 7. $f \in \mathbb{C}\Gamma$ に対し

$$\|f\| = \sup\{\|\pi(f)\| : \pi : \mathbb{C}\Gamma \to \mathbb{B}(H_\pi), *\text{−準同型, ここで } H_\pi \text{は Hilbert 空間 }\}$$

と定めると, これは $\mathbb{C}\Gamma$ 上の C^*-ノルムになる. $C^*\Gamma$ をこのノルムによる完備化とし, これを Γ の全群 C^*-環と呼ぶ.

Γ の左正則表現 λ に対し $\mathbb{C}\Gamma$ から $\mathbb{B}(l^2\Gamma)$ への*-準同型 λ を $\lambda(\sum a_g\delta_g) = \sum a_g\lambda(g)$ で定める. この像 $\lambda(\mathbb{C}\Gamma)$ のノルム閉包を $C^*_r\Gamma$, 弱位相での閉包を $L\Gamma$ と定めそれぞれ Γ の被約群 C^*-環, 群 *von Neumann* 環と呼ぶ.

$C^*\Gamma$ は categorical に良い性質を持つが, 具体的に調べるのは難しい. 一方, $C^*_r\Gamma$ や $L\Gamma$ は写像の構成などに難があるものの, $l^2\Gamma$ という具体的な, しかも可分 Hilbert 空間上に実現されるという点で扱いやすい. 特に従順でない群を扱うときにこれらの違いは大きい.

簡単な例を挙げておこう.

Example 4. Γ が可換群であるとき, Fourier 変換により $l^2(\Gamma) \cong L^2(\hat{\Gamma}, \mu)$, $C_r^*\Gamma \cong C(\hat{\Gamma})$, $L\Gamma \cong L^\infty(\hat{\Gamma}, \mu)$. ここで $\hat{\Gamma}$ は Γ の Pontryagin 双対, μ は Plancherel 測度 (Fourier 変換をユニタリ作用素にするような $\hat{\Gamma}$ 上の Haar 測度) である.

調和解析においてのこれらの空間の重要性を考えれば, 群 C^*-環の重要性もお分かりいただけるのではないか. 最後に, 従順性とこれらの作用素環の性質の関係性について述べよう.

Theorem 3. 以下は同値.

1. Γ は従順,
2. $C^*\Gamma \cong C_r^*\Gamma$,
3. $C_r^*\Gamma$ は核型,
4. $L\Gamma$ は AFD.

まず 2 番目の性質は従順群の群 C^*-環は categorical にも具体的にも扱いやすい対象であることを示している. 3 番目の性質は C^*-環論においては基本的な性質である. 核型性も多くの特徴付けを持つが, 例えば多様体論での 1 の分割に当たる性質に対応する. 4 番目は行列環による近似が可能であることを示していて, von Neumann 環論では基本的な性質である. これもまた多くの特徴付けを持つ.

以上のように, 従順性は非常に多くの同値条件を持つ ($10^{10^{10}}$ もある!(実際に数えたわけではない)). そのために多くの側面を持ち, 幾何学やエルゴード理論, 力学系などにおいても基本的な概念となっている. 特に群の解析的扱いにおいて最も重要な概念である.

今回の講演や本稿を通じ学部までで学ぶ数学が全て有機的に絡み合い, 現代数学に繋がっているところを少しでも感じていただけたでしょうか. これからの数学を学ぶ上でのモチベーションになれば幸いです.

参考文献

[1] K. R. Davidson, C^*-algebras by Example, Fields Institute Monographs, **6**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

[2] J. L. Kelley, General Topology, ,Graduate texts in Mathematics, **87**, Springer, New York, 1975.

[3] G. Murphy, C^*-algebras and Operator Theory, Academic Press, London, 1990.

[4] A. L. T. Paterson, Amenability, Mathematical Surveys and Monographs, **29**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.

[5] M. Takesaki, Theory of Operator Algebra, I, Reprint of the first (1979) edition, Springer, Berlin, 2002.