

A serene sunset scene over a body of water. The sky is filled with soft, colorful clouds in shades of orange, yellow, and purple. The sun is low on the horizon, casting a warm glow. In the foreground, the silhouettes of various plants and trees are visible, some with leaves catching the light. In the background, the silhouettes of buildings and houses are visible along the shoreline. The water reflects the colors of the sky and the silhouettes of the buildings and plants.

Peano算術の無矛盾性証明

証蔵

Peano算術とは

公理系に数学的帰納法を含む自然数論

公理の例

- 1は自然数である.
- a が自然数のとき, a' もまた自然数である.
- a, b が自然数のとき, $a'=b'$ ならば $a=b$.
- $a'=1$ なる自然数 a は存在しない.

✓ “ $'$ ”は後続者関数. “ $\sim$ の次”を表わす.

数学的帰納法：

FがPeano算術における性質とするとき，

- i) 自然数1はFを充たす.
- ii) 自然数aがFを充たすとき，自然数a'もまたFを充たす.
このとき，任意の自然数aはFを充たす.

加法の公理:

- $a + 1 = a'$
- $(a + b)' = a + b'$

乗法の公理:

- $a \times 1 = a$
- $a \times b' = (a \times b) + a$

ここで, a, b は自然数.

ここでの目的

Peano算術の無矛盾性を証明すること

ここでの目的

Peano算術の無矛盾性を証明すること



次のような設問に答えることができるように、
諸々の概念を明確にしておかなくてはならない。

設問

- “矛盾”とは？
- “命題”とは？ また、その“否定”とは？
- “証明される”とは？

そのための方法

Peano算術の形式化(=形式的体系PAの定義)

形式化とは

理論に出てくる諸々の概念を記号化し、
構成手続きも含めて厳密に定義すること

Peano算術の形式的体系PAの定義

i) 記号:

- 定数記号 1
- 自由変数 $a, b, c, \dots$
- 束縛変数 $x, y, z, \dots$
- 関数記号 $+, \times$
- 述語記号 $=, <$
- 論理記号 $\neg, \wedge, \vee, \supset, \forall, \exists$
- 補助記号 $(,), \rightarrow$

ii) PAのtermの定義:

- 1) 1はPAのtermである.
- 2) 自由変数 $a, b, c, \dots$ はPAのtermである.
- 3) s, t がPAのtermのとき, $s', s + t, s \times t$ もそれぞれPAのtermである.
- 4) 以上1) ~ 3) で定められたものだけが, PAのtermである.

PAのtermの例:

$$1''''$$

$$1' + 1'$$

$$((a \times 1) + (b + c''')) \times (b' + a)$$

iii) PAのformulaの定義:

- 1) s, t をPAのtermとするとき, $s = t, s < t$ はそれぞれPAのformulaである.
- 2) C, D がPAのformulaのとき, $\neg C, C \wedge D, C \vee D, C \supset D$ もそれぞれPAのformulaである.
- 3) $F(a)$ が自由変数 a を含むPAのformulaのとき, $\forall x F(x), \exists x F(x)$ もまたPAのformulaである. 但し, ここで x は $F(a)$ に現れないものとする.
- 4) 以上1) ~ 3) で定められたものだけが, PAのformulaである.

PAのformulaの例:

$$1'''' < a + (b \times 1'')$$

$$1' + 1' = 1'''$$

$$\forall x \forall y (x + y = y + x) \vee \exists x \exists y \neg (x + y = y + x)$$

iv) PAの式の定義:

$A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n, B_1, B_2, \dots, B_{m-1}, B_m$ をPAのformulaとしたとき,

$$A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n \rightarrow B_1, B_2, \dots, B_{m-1}, B_m$$

の形の図形をPAの式という. ここで n, m は0であってもよい(その場合, その式を空式という).

- ✓ 内容的には左辺 $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$ のすべてが成り立つと仮定すれば, 右辺 $B_1, B_2, \dots, B_{m-1}, B_m$ のいずれかが成り立つ, ということ.
- ✓ 左辺に偽, または右辺に真なるformulaがあるとき, その式は真. それ以外の場合は偽であると定義する.
- ✓ $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$ 等のformulaの有限列を Γ, Δ 等のギリシア文字で略す.

PAの式の例:

$$a < b, b < c \rightarrow a < c$$

$$\exists x (x'''' < 1) \rightarrow$$

$\rightarrow$

v) PAの推論図の定義:

S_1, S_2, S をPAの式としたとき,

$$\frac{S_1}{S} \qquad \frac{S_1 \quad S_2}{S}$$

の形の図形を推論図という.

• 式の構造についての推論図:

$$\text{増左} \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta}{D, \Gamma \rightarrow \Delta}$$

$$\text{増右} \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta, D}$$

$$\text{換左} \quad \frac{C, D, \Gamma \rightarrow \Delta}{D, C, \Gamma \rightarrow \Delta}$$

$$\text{換右} \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, C, D}{\Gamma \rightarrow \Delta, D, C}$$

$$\text{減左} \quad \frac{D, D, \Gamma \rightarrow \Delta}{D, \Gamma \rightarrow \Delta}$$

$$\text{減右} \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, D, D}{\Gamma \rightarrow \Delta, D}$$

✓ 上式のC,D をauxiliary formula, 下式のC,D をprincipal formulaという.

- cut (三段論法) :

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, D \quad D, \Pi \rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Pi \rightarrow \Delta, \Lambda}$$

✓ 上式の D を principal formula という.

• 論理記号についての推論図(1/3):

$$\neg_{\text{左}} \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, D}{\neg D, \Gamma \rightarrow \Delta} \quad \neg_{\text{右}} \quad \frac{D, \Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta, \neg D}$$

$$\wedge_{\text{左}} \quad \frac{C, \Gamma \rightarrow \Delta}{C \wedge D, \Gamma \rightarrow \Delta} \quad \frac{D, \Gamma \rightarrow \Delta}{C \wedge D, \Gamma \rightarrow \Delta} \quad \wedge_{\text{右}} \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, C \quad \Gamma \rightarrow \Delta, D}{\Gamma \rightarrow \Delta, C \wedge D}$$

✓ 上式の C, D をauxiliary formula, 下式の $\neg D, C \wedge D$ をprincipal formulaという.

• 論理記号についての推論図(2/3):

$$\vee_{\text{左}} \frac{C, \Gamma \rightarrow \Delta \quad D, \Gamma \rightarrow \Delta}{C \vee D, \Gamma \rightarrow \Delta} \quad \vee_{\text{右}} \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, C \quad \Gamma \rightarrow \Delta, D}{\Gamma \rightarrow \Delta, C \vee D}$$

$$\supset_{\text{左}} \frac{C, \Gamma \rightarrow \Delta \quad \Pi \rightarrow \Lambda, D}{C \supset D, \Gamma, \Pi \rightarrow \Delta, \Lambda} \quad \supset_{\text{右}} \frac{C, \Gamma \rightarrow \Delta, D}{\Gamma \rightarrow \Delta, C \supset D}$$

✓ 上式の C, D をauxiliary formula, 下式の $C \wedge D, C \supset D$ をprincipal formulaという.

• 論理記号についての推論図(3/3):

$$\forall \text{左} \quad \frac{F(t), \Gamma \rightarrow \Delta}{\forall x F(x), \Gamma \rightarrow \Delta}$$

$$\forall \text{右} \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, F(a)}{\Gamma \rightarrow \Delta, \forall x F(x)}$$

$$\exists \text{左} \quad \frac{F(a), \Gamma \rightarrow \Delta}{\exists x F(x), \Gamma \rightarrow \Delta}$$

$$\exists \text{右} \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, F(t)}{\Gamma \rightarrow \Delta, \exists x F(x)}$$

- ✓ 上式の $F(a), F(t)$ をauxiliary formula, 下式の $\forall x F(x), \exists x F(x)$ をprincipal formulaという.
- ✓ $\forall$ 右, $\exists$ 左の上式の自由変数 a (下式には現れない)をeigenvariableという.

- ind (数学的帰納法) :

$$\frac{F(a), \Gamma \rightarrow \Delta, F(a')}{F(1), \Gamma \rightarrow \Delta, F(t)}$$

✓ 上式の $F(a), F(a')$ をauxiliary formula, 下式の $F(1), F(t)$ をprincipal formulaという.

vi) PAの証明図の定義:

1) 論理的始式 $D \rightarrow D$, および任意の算術的始式はPAの証明図であり, その終式は当該の始式自身である.

2) 式 S_1, S_2 の証明図 $\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ S_1 \end{array}$ $\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ S_2 \end{array}$ が与えられたとき, S_1, S_2 を
上式とする推論図 $\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ S_1 \end{array}$ $\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ S_1 \quad S_2 \end{array}$ を考えれば, これらの図

形はいずれも式 S を終式とする PA^S の証明図である.

3) 以上1), 2) で定められたものだけが, PAの証明図である.

✓ 始式は論理記号を含まない真な式.

✓ 式 S の証明図があるとき, S は provable であるという.

PAの証明図の例: $\rightarrow 1' + 1' = 1'''$ の証明図

[illegible]

$$\begin{array}{l}
\frac{1'+1'=(1'+1)'}{1'+1'=(1'+1)'} \rightarrow 1'+1'=(1'+1)'} \quad \frac{(1'+1)=1''}{(1'+1)=1''} \rightarrow (1'+1)=1'' \\
\frac{1'+1'=(1'+1)'}{1'+1'=(1'+1)'} \wedge \frac{(1'+1)=1''}{(1'+1)=1''} \rightarrow 1'+1'=(1'+1)' \wedge (1'+1)=1'' \rightarrow (1'+1)=1'' \\
\frac{1'+1'=(1'+1)'}{1'+1'=(1'+1)'} \wedge \frac{(1'+1)=1''}{(1'+1)=1''} \rightarrow 1'+1'=(1'+1)' \wedge (1'+1)=1'' \rightarrow 1'+1'=1'' \\
\frac{1'+1'=(1'+1)'}{1'+1'=(1'+1)'} \wedge \frac{(1'+1)=1''}{(1'+1)=1''} \rightarrow 1'+1'=(1'+1)' \wedge (1'+1)=1'' \rightarrow 1'+1'=1'' \dots \textcircled{2}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c} \textcircled{2} \quad \textcircled{3} \\ \textcircled{1} \quad 1'+1'=(1'+1)'\wedge(1'+1)'=1''' \rightarrow 1'+1'=1''' \\ \hline \rightarrow 1'+1'=1''' \end{array}$$

先の設問に対して

- “矛盾”とは？

⇒ ある命題とその否定がともに証明されること。

- “命題”とは？ また、その“否定”とは？

⇒ PA上ではformulaとして表現される. これを D の形とすれば, D の否定は $\neg D$ の形.

- それが“証明される”とは？

⇒ $\rightarrow D$ と $\rightarrow \neg D$ がともにPAでprovableであること.

PAにおける“矛盾”の表現

ここでは、次の式(空式)をPAにおける“矛盾”と定義して用いる。

→

その理由

① 無矛盾の証明を進める上で、扱いやすい(形が“単純”.
より具体的には, 論理記号を含まない).

② 空式 $\rightarrow$ が provable であることと, $\rightarrow D$ と
 $\rightarrow \neg D$ がともに provable であることが同値.

参考：式計算における“無矛盾性証明”の例

古典述語計算LKにおける無矛盾性証明

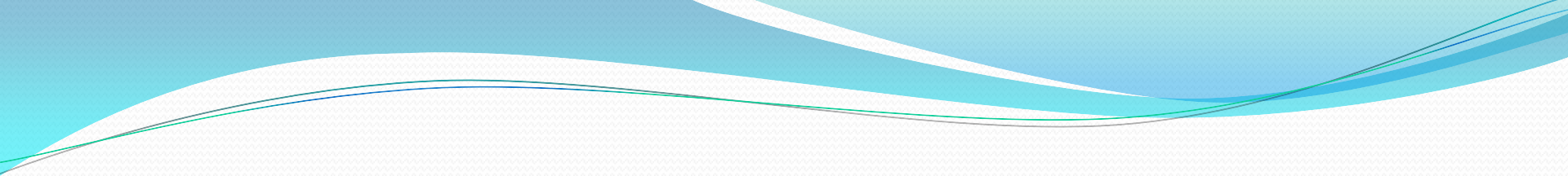
⇒ LKの基本定理(=cut除去定理)を用いた証明

LKの基本定理とは

LKの基本定理:

任意のLKの証明図に対し, cut freeなものが存在する.

✓ “cut free”とは, cutなしの証明図のこと.



“cut freeな証明図”には, どのような性質があるか？

“cut freeな証明図”には, どのような性質があるか？



cutとそれ以外の推論図の形を見比べればよい.

1) cutの場合

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, D \quad D, \Pi \rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Pi \rightarrow \Delta, \Lambda}$$

⇒ 上式のformulaで、下式のいかなるformulaのsubformulaにもなっていないものがある。

- ✓ C, D をformulaとしたとき、 C が D のsubformulaであるとは、 C が D を構成する過程で現れるformulaであるか、または C が D 自身であること。
- ✓ 例えば、 D が $A \wedge B$ の形するとき、 D のsubformulaは $A, B, A \wedge B$ 。

2) cut以外の推論図の場合(例: $\supset$ 左)

$$\supset_{\text{左}} \frac{C, \Gamma \rightarrow \Delta \quad \Pi \rightarrow \Lambda, D}{C \supset D, \Gamma, \Pi \rightarrow \Delta, \Lambda}$$

$\Rightarrow$ 上式のformulaは, いずれも下式のあるformulaの subformulaになっている.

2) cut以外の推論図の場合(例: $\supset$ 左)

$$\supset_{\text{左}} \frac{C, \Gamma \rightarrow \Delta \quad \Pi \rightarrow \Lambda, D}{C \supset D, \Gamma, \Pi \rightarrow \Delta, \Lambda}$$

$\Rightarrow$ 上式のformulaは、いずれも下式のあるformulaの subformulaになっている。



cut freeな証明図は“subformula property”が成り立つ。

subformula property:

式 $\Gamma \rightarrow \Delta$ の cut free な証明図の任意の formula は, $\Gamma \rightarrow \Delta$ のある formula の subformula になっている.

subformula property:

式 $\Gamma \rightarrow \Delta$ の cut free な証明図の任意の formula は, $\Gamma \rightarrow \Delta$ のある formula の subformula になっている.



この性質から, LK の無矛盾性が直ちに出る.

PAの無矛盾性証明

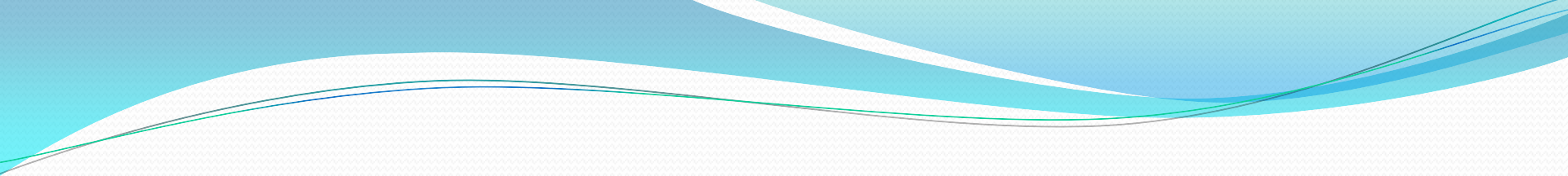
PAの無矛盾性証明もLKと同様にしてできないか？

PAの無矛盾性証明

PAの無矛盾性証明もLKと同様にしてできないか？



結論からいえば、
LKとは異なり簡単には証明できない。



PAの基本定理(=cut除去定理)には,
LKの基本定理にはない, ある“制限”がある.

PAの基本定理(=cut除去定理)には,
LKの基本定理にはない, ある“制限”がある.



その“制限”が, PAの無矛盾性証明を
(LKのそれと比して)複雑なものにする原因となっている.

PAの基本定理の“制限”

PAの基本定理:

任意のPAの証明図に対し, free cut freeなものが存在する.

- ✓ “free cut”とは, そのprincipal formulaが算術的始式のformula, indのprincipal formulaのいずれでもないcutのこと.

PAの基本定理の“制限”

PAの基本定理:

任意のPAの証明図に対し, free cut freeなものが存在する.



free cutでないcutが証明図にあれば, そのcutについては除去されずに証明図に残る.

- ✓ “free cut”とは, そのprincipal formulaが算術的始式のformula, indのprincipal formulaのいずれでもないcutのこと.

基本定理の応用例: free cut freeでない証明図

→1'+1'=1'''の証明図

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{\rightarrow a+b'=(a+b)'}{\rightarrow \forall y(a+y)=(a+y)'} \quad \frac{1'+1'=(1'+1)'\rightarrow 1'+1'=(1'+1)'}{\forall y(1'+y'=(1'+y)')\rightarrow 1'+1'=(1'+1)'} \quad \frac{\rightarrow a+1=a'}{\rightarrow \forall x(x+1=x)} \quad \frac{1'+1=1''\rightarrow 1'+1=1''}{\forall x(x+1=x')\rightarrow 1'+1=1''}}{\frac{\rightarrow \forall x \forall y(x+y'=(x+y)') \quad \frac{\forall x \forall y(x+y'=(x+y)')\rightarrow 1'+1'=(1'+1)'}{\rightarrow 1'+1=1''}}{\rightarrow 1'+1'=(1'+1)'}} \\
\frac{\frac{\frac{a=b \rightarrow a'=b'}{\rightarrow a=b \rightarrow a'=b'} \quad \frac{1'+1=1'' \rightarrow (1'+1)'=1'' \rightarrow 1'+1=1'' \rightarrow (1'+1)'=1''}{\rightarrow \forall y(1'+1=y) \rightarrow (1'+1)'=1''} \quad \frac{\frac{1'+1=1'' \rightarrow (1'+1)'=1''}{\rightarrow \forall x \forall y(x=y) \rightarrow x'=y'}}{\rightarrow 1'+1=1'' \rightarrow (1'+1)'=1''} \quad \frac{1'+1=1'' \rightarrow 1'+1=1'' \quad (1'+1)=1'' \rightarrow (1'+1)'=1''}{1'+1=1'' \rightarrow (1'+1)'=1''}}{\rightarrow (1'+1)'=1''}
\end{array}$$

[illegible]

$$\frac{\textcircled{1} \quad 1'+1'=(1'+1)' \wedge (1'+1)'=1''' \rightarrow 1'+1'=1'''}{\rightarrow 1'+1'=1'''} \quad \frac{\textcircled{2} \quad \textcircled{3}}{\textcircled{1}}$$

基本定理の応用例: free cut freeな証明図

$\rightarrow 1' + 1' = 1'''$ の証明図

$$\frac{\frac{\rightarrow 1' + 1 = 1'' \quad 1' + 1 = 1'' \rightarrow (1' + 1)' = 1'''}{\rightarrow (1' + 1)' = 1''} \quad \frac{\frac{\rightarrow 1' + 1' = (1' + 1)' \quad 1' + 1' = (1' + 1)', (1' + 1)' = 1''' \rightarrow 1' + 1' = 1'''}{(1' + 1)' = 1''' \rightarrow 1' + 1' = 1''}}{\rightarrow 1' + 1' = 1'''}$$

PAの基本定理の系

PAのsubformula property:

式 $\Gamma \rightarrow \Delta$ のPAのfree cut freeな証明図の任意のformulaは、次のいずれかのformulaのsubformulaになっている。

- 1) $\Gamma \rightarrow \Delta$ のあるformula
- 2) 算術的始式のあるformula
- 3) indのprincipal formula

PAの無矛盾性証明のための検証

PAの基本定理, subformula propertyを用いて
無矛盾性の証明を試みると...

PAの証明図の任意のformulaは、次のいずれかの
formulaのsubになっている。

- 1) 終式 $\neg Con(PA)$ のあるformula
- 2) 算術的始式のあるformula
- 3) m の principal formula

PAの無矛盾性証明のための検証

PAの基本定理, subformula propertyを用いて
無矛盾性の証明を試みると...



→ の証明図の任意のformulaは, 次のいずれかの
formulaの subformulaになっている.

- 1) 終式 → のあるformula
- 2) 算術的始式のあるformula
- 3) indのprincipal formula

1) 証明図のformulaが, $\rightarrow$ のあるformula
のsubformulaの場合の検証:

$\Rightarrow$ 式 $\rightarrow$ にはformulaがないから, この場合はあり
得ない.

1) 証明図のformulaが, $\rightarrow$ のあるformula
のsubformulaの場合の検証:

$\Rightarrow$ 式 $\rightarrow$ にはformulaがないから, この場合はあり
得ない.



LKの無矛盾性証明の場合, この場合1)の検証だけでこ
とが済んだ. しかし, PAの場合はそうはいかない.

**2) 証明図のformulaが, 算術的始式のある
formulaのsubformulaの場合の検証:**

⇒ 次の補題が成り立つ. そこから検証を進める.

補題1:

free cut freeでindなしの $\rightarrow$ の証明図は、次の1) ~ 3)の条件を充たす(このような証明図を“simple”とよぶ)。

- 1) 論理的始式 $D \rightarrow D$ が現れない。
- 2) 推論図 増が現れない。
- 3) 論理記号についての推論図が現れない。

✓ 証明の際は、証明図がfree cut freeであることを考えればよい。

系:

終式 $\rightarrow$ に至るsimpleな証明図の任意のformulaは,
atomic formulaである.

✓ “atomic formula”とは論理記号を含まないformulaのこと. 例
えば, $a=a$, $1'+1<1''$ 等.

→ **を終式とするsimpleな証明図を考えると・・・**

算術的始式に始まり、推論図換、減、cutを経由して
終式 $\perp$ に至る証明図となっている。

このような証明図が存在し得ないことを証明すれば、
目的が達せられるわけだ。

→ を終式とするsimpleな証明図を考えると...



算術的始式に始まり, 推論図 換, 減, cutを経由して
終式 → に至る証明図となっている.

このような証明図が存在しないことを証明すれば,
目的が達せられるわけだ.

→ を終式とするsimpleな証明図を考えると...



算術的始式に始まり, 推論図 換, 減, cutを経由して
終式 → に至る証明図となっている.



このような証明図が存在し得ないことを証明すれば,
目的が達せられる.

ここで, これからの証明に必要な命題を一つとりあげておく.

命題1:

$\Gamma(a) \rightarrow \Delta(a)$ の証明図のeigenvariable以外の自由変数 a をすべて数字1で置き換えた図形はやはり証明図であり, その終式は $\Gamma(1) \rightarrow \Delta(1)$ である.

✓ 証明は, 証明図の構成についての帰納法による.

- 以降, 証明図中にはeigenvariable以外の自由変数は現れないものとする(命題1).
- 証明図に現れるformulaはいずれもatomic formulaである(系).

証明図中のformulaの真/偽が有限回の操作で決定可能.
(これは具体的な自然数についての命題となっている)

証明図中の式の真/偽が有限回の操作で決定可能.

- 以降, 証明図中にはeigenvariable以外の自由変数は現れないものとする(命題1).
- 証明図に現れるformulaはいずれもatomic formulaである(系).



証明図中のformulaの真/偽が有限回の操作で判定可能.
($\because$ 具体的な自然数についての命題となっている)

証明図中の式の真/偽が有限回の操作で判定可能

- 以降, 証明図中にはeigenvariable以外の自由変数は現れないものとする(命題1).
- 証明図に現れるformulaはいずれもatomic formulaである(系 i).



証明図中のformulaの真/偽が有限回の操作で判定可能.
($\because$ 具体的な自然数についての命題となっている)



証明図中の式の真/偽が有限回の操作で判定可能.

以上のことを利用して、無矛盾性証明を行なう。

- 算術的始式は真 (= 左辺に偽なformulaがあるか、または右辺に真なformulaがある)。
- 一方、終式 $\rightarrow$ は偽 (= 左辺に偽なformulaがなく、かつ右辺に真なformulaがない)。

終式 $\rightarrow$ による証明図の中にある元論理式で、の上式が真、下式が偽なものが存在する。

以上のことを利用して、無矛盾性証明を行なう。

- 算術的始式は真 (= 左辺に偽なformulaがあるか、または右辺に真なformulaがある)。
- 一方、終式 $\rightarrow$ は偽 (= 左辺に偽なformulaがなく、かつ右辺に真なformulaがない)。



終式 $\rightarrow$ に至る証明図の中にある推論図 I で、 I の上式が真、下式が偽なものが存在する。

いま考えている証明図は $\rightarrow$ に至るsimpleな証明図
(=論理的始式, 推論図増, 論理記号についての推論図,
indを含まない).

推論図 Γ は、換/減/cutのいずれか.

$$\Gamma \vdash ADB$$

$$\Gamma \vdash ACD$$

$$\Gamma \vdash AD \quad D \vdash A$$

$$\Gamma \vdash AD$$

$$\Gamma \vdash ADC$$

$$D \vdash AA$$

いま考えている証明図は $\rightarrow$ に至るsimpleな証明図
 (=論理的始式, 推論図増, 論理記号についての推論図,
 indを含まない).



推論図 I は, 換/減/cutのいずれか.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{減右} \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, D, D}{\Gamma \rightarrow \Delta, D} &
 \text{換右} \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, C, D}{\Gamma \rightarrow \Delta, D, C} &
 \text{cut} \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, D \quad D, \Pi \rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Pi \rightarrow \Delta, \Lambda}
 \end{array}$$

例えば, I がcutの場合:

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, D \quad D, \Pi \rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Pi \rightarrow \Delta, \Lambda}$$

- 仮定により, 上式は真. つまり $\Gamma \rightarrow \Delta, D$ および $D, \Pi \rightarrow \Lambda$ の左辺に偽なformulaがあるか, 右辺に真なformulaがある.
- 該当のformulaがprincipal formula D とすると, $\Gamma \rightarrow \Delta, D$ において D は真, $D, \Pi \rightarrow \Lambda$ において D は偽.

これはお見せしたとおり、見直しの式に合致する式を代入する部分にはあてはまり、その場合は消滅した。

例えば, I がcutの場合:

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, D \quad D, \Pi \rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Pi \rightarrow \Delta, \Lambda}$$

- 仮定により, 上式は真. つまり $\Gamma \rightarrow \Delta, D$ および $D, \Pi \rightarrow \Lambda$ の左辺に偽なformulaがあるか, 右辺に真なformulaがある.
- 該当のformulaがprincipal formula D とすると, $\Gamma \rightarrow \Delta, D$ において D は真, $D, \Pi \rightarrow \Lambda$ において D は偽.

これは矛盾. したがって, 算術的始式に始まり, 終式 $\rightarrow$ に至る証明図はあり得ない. すなわち2)の場合は証明された.

3) 証明図のformulaが, indのprincipal formulaのsubformulaの場合の検証:

⇒ indの有限個のcutへの還元(=“indの分解”)を行なう. この還元の後, 先の2)の場合に帰着されることになる.

補題2:

free cut freeな証明図の一番下にあるindから下には, 論理記号についての推論図は現れない.

✓ ここで“下”とは糸 (= 推論図の系列) の下の部分をいう.

命題2:

s, t をtermとしたとき, $s = t$ が provable ならば, $F(s) \rightarrow F(t)$ および $F(t) \rightarrow F(s)$ が provable である.

✓ この命題は $a = b, a < c \rightarrow b < c$ 等の算術的始式 (= 等号公理) を一般に考えれば出る.

“indの分解”の定義

次の形のind

$$\frac{F(a), \Gamma \rightarrow \Delta, F(a')}{F(1), \Gamma \rightarrow \Delta, F(k)}$$

を次のような有限個のcutに還元することを, indの分解という.

- ✓ 証明図中のindは下のものから順に分解していく. こうすることで, 補題2より, 下式の k が自由変数を含まない場合を考えることができる.

$$\frac{F(1), \Gamma \rightarrow \Delta, F(1') \quad F(1'), \Gamma \rightarrow \Delta, F(1'')}{\quad} \bullet$$

$$\frac{F(1), \Gamma, \Gamma \rightarrow \Delta, \Delta, F(1'')}{\quad} \bullet$$

$$\frac{F(1), \Gamma \rightarrow \Delta, F(1'') \quad F(1''), \Gamma \rightarrow \Delta, F(1''')}{\quad}$$

$$\frac{F(1), \Gamma, \Gamma \rightarrow \Delta, \Delta, F(1''')}{\quad}$$

$$\frac{F(1), \Gamma \rightarrow \Delta, F(1''')}{\quad}$$

•

•

•

$$\frac{F(1), \Gamma \rightarrow \Delta, F(1' \cdots') \quad F(1' \cdots'), \Gamma \rightarrow \Delta, F(n)}{\quad} \bullet$$

$$\frac{F(1), \Gamma \rightarrow \Delta, F(n) \quad F(n) \rightarrow F(k)}{\quad}$$

$$F(1), \Gamma \rightarrow \Delta, F(k)$$