モデル理論入門

ぴあのん @piano2683

2012 年 9 月 8 日

0 notation

以下の発表資料では以下の様な記号を用いる．

- 言語：$\mathcal{L}$
- $\mathcal{L}$ 構造：$\mathcal{M}, \mathcal{N}$
- $\mathcal{L}$ 論理式：φ, ψ
- $\mathbf{Fml}_{\mathcal{L}} := \{\varphi; \mathcal{L}$ 論理式 $\}$
- $\mathbf{CF}_{\mathcal{L}} := \{\varphi \in \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}}; \mathcal{L}$ 閉論理式 $\}$
- $\mathcal{M}$: $\mathcal{L}$ 構造，$A \subseteq dom(\mathcal{M})$ に対し，

$$\mathcal{L}(A) := \mathcal{L} \cup \{c_a; a \in A\} \quad (c_a^{\mathcal{M}} := a)$$

- $\mathbf{Th}_{\mathcal{L}}(\mathcal{M}) := \{\varphi \in \mathbf{CF}_{\mathcal{L}}; \mathcal{M} \vDash \varphi\}$

Remark 0.1.

- 常に等号付きの言語を考えることにして，毎回明示することはしない．
- 記述の簡略化のため，$\mathcal{M}$ で $dom(\mathcal{M})$ のことを表す．

1 コンパクト性定理

Definition 1.1 (有限充足可能)**.**
理論 $T \subseteq \mathbf{CF}_{\mathcal{L}}$ が**有限充足可能** $\overset{\textbf{def.}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の有限部分集合 $T' \subseteq_{fin} T$ がモデルをもつ（充足可能）．

Theorem 1.2 (コンパクト性定理)**.**
理論 $T \subseteq \mathbf{CF}_{\mathcal{L}}$ が充足可能 $\Leftrightarrow$ T が有限充足可能

Proof
$\Rightarrow$ は明らか．
$\Leftarrow$ は，一階述語論理の完全性定理の系

$$T \text{ が無矛盾} \Leftrightarrow T \text{ はモデルをもつ}$$

と証明の有限性よりわかる． ■

2　部分構造・基本部分構造

Definition 2.1 (部分構造)**.**

$\mathcal{M}$: $\mathcal{L}$ 構造とする．

$\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ が $\mathcal{M}$ の部分構造である．($\mathcal{N} \subseteq_{sst} \mathcal{M}$ と表記する．)

$\overset{\mathbf{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathcal{N}$ が次を満たす．

(1) 定数記号 $c \in \mathcal{L}$ に対し，$c^{\mathcal{M}} \in \mathcal{N}$

(2) n 変数函数記号 $f \in \mathcal{L}$ に対し，$\mathcal{N}$ は函数 $f^{\mathcal{M}} : \mathcal{M}^n \to \mathcal{M}$ について閉じている．

$\mathcal{N} \subseteq_{sst} \mathcal{M}$ のとき，$\mathcal{N}$ は自然に $\mathcal{L}$ 構造とみなせる．

- 定数記号 $c \in \mathcal{L}$ に対し，$c^{\mathcal{N}} := c^{\mathcal{M}}$
- n 変数函数記号 $f \in \mathcal{L}$ に対し，$f^{\mathcal{N}} := f^{\mathcal{M}}|_{\mathcal{N}^n}$
- m 変数述語記号 $R \in \mathcal{L}$ に対し，$R^{\mathcal{N}} := R^{\mathcal{M}} \cap \mathcal{N}^m$

Definition 2.2 (基本部分構造)**.**

$\mathcal{N} \subseteq_{sst} \mathcal{M}$ が次を満たすとき，$\mathcal{N}$ は $\mathcal{M}$ の**基本部分構造**（または，$\mathcal{M}$ は $\mathcal{N}$ の**基本拡大**である）といい，$\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$ と表す：

$$\text{任意の } \varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}}, a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{N} \text{ に対して，}$$

$$\mathcal{M} \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n)$$

3　Löwenheim-Skolem の定理

この節では $\mathcal{M}$: 無限 $\mathcal{L}$ 構造 とする．まず，“十分大きな”モデルの存在を示す．

Lemma 3.1.

κ を無限基数とする．$\mathcal{M}$ の基本拡大で濃度が κ 以上のものが存在する．

Proof

$T := \mathbf{Th}_{\mathcal{L}(\mathcal{M})}(\mathcal{M})$ とおく．言語 $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ に属さない新しい定数記号を“κ 個”用意する：$\{c_i ; i < \kappa\}$

$(\mathcal{L}(\mathcal{M}) \cup \{c_i ; i < \kappa\})$ 閉論理式の集合

$$T^* := T \cup \{c_i \neq c_j ; i < j < \kappa\}$$

を考える．任意有限個の $i_1 < \cdots < i_n < \kappa$ に対して，$T \cup \{c_{i_k} \neq c_{i_l} ; k < l \leq n\}$ はモデルをもつ．よって T^* は有限充足可能なので，コンパクト性定理より T^* のモデル $\mathcal{N}$ が存在する．$|\mathcal{N}| \geq \kappa$ であることは，$\mathcal{N}$ が相異なる κ 個の元 $\{c_i^{\mathcal{N}} ; i < \kappa\}$ をもつことから分かる．

$\mathcal{N}$ は T のモデルでもあり，任意の $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}}, a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{M}$ に対して，

$$\begin{aligned}\mathcal{M} \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n) &\Rightarrow \varphi(a_1, \ldots, a_n) \in T \\ &\Rightarrow \mathcal{N} \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n)\end{aligned}$$

したがって，$\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ である．■

Lemma 3.2 (Tarski-Vaught test).
$\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ に対し，以下の二条件は同値：

(1) $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$
(2) 任意の $\varphi(x) \in \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}(\mathcal{N})}$ に対し，

$$\mathcal{M} \vDash \exists x \varphi(x) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M} \vDash \varphi(a) \text{ となるような } a \in \mathcal{N} \text{ が存在する}$$

Proof
(1) $\Rightarrow$ (2) : $\mathcal{L}(\mathcal{N})$ 論理式 $\varphi(x)$ に対して，$\mathcal{M} \vDash \exists \varphi(x)$ とする．$\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$ より $\mathcal{N} \vDash \exists \varphi(x)$．したがって $\exists$ の $\mathcal{N}$ での解釈により，$\mathcal{N} \vDash \varphi(a)$ となる $a \in \mathcal{N}$ が存在する．再び $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$ により，$\mathcal{M} \vDash \varphi(a)$.

(2) $\Rightarrow$ (1) : まず，$\mathcal{N}$ が $\mathcal{M}$ の部分構造になっていることを示す．

- 定数記号 $c \in \mathcal{L}$ に対して，$\mathcal{M} \vDash \exists x(c = x)$．仮定より，$a \in \mathcal{N}$ を選んで $\mathcal{M} \vDash c = a$ とできる．このことは $c^{\mathcal{M}} \in \mathcal{N}$ を意味する．すなわち，定数記号の $\mathcal{M}$ での解釈は全て $\mathcal{N}$ に入っている．
- n 変数函数記号 $f \in \mathcal{L}$ と任意の $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{N}$ に対し，$\mathcal{M} \vDash \exists x(f(a_1, \dots, a_n) = x)$．仮定より，$a \in \mathcal{N}$ を選んで $\mathcal{M} \vDash f(a_1, \dots, a_n) = a$ とできる．このことは $f^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{N}$ を意味する．すなわち， n 変数函数記号 $f \in \mathcal{L}$ に対し，$\mathcal{N}$ は函数 $f^{\mathcal{M}} : \mathcal{M}^n \to \mathcal{M}$ について閉じている．

最後に，任意の $\mathcal{L}(\mathcal{N})$ 閉論理式 φ に対して，

$$\mathcal{M} \vDash \varphi \Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash \varphi$$

となることを，論理式の構成に関する帰納法によって示せばよい[*1]. ■

Theorem 3.3 (Löwenheim-Skolem の下降定理).
$A \subseteq \mathcal{M}$ に対し，$A \subseteq \mathcal{N} \prec \mathcal{M}$ なる $\mathcal{N}$ で $|\mathcal{N}| \leq |A| + |\mathcal{L}| + \aleph_0$ を満たすものが存在する．

Proof
$\kappa := |A| + |\mathcal{L}| + \aleph_0$ とおく．$|\mathcal{M}| \geq \kappa$ の場合について考えればよい．
濃度が κ 以下の $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ の元の昇鎖 $\{A_n ; n < \omega\}$ を帰納的に作る．

- $A_0 := A$ とする．このとき，もちろん $|A_0| = |A| \leq \kappa$.
- A_n までできたとする．$|A_n| \leq \kappa$（仮定）より，

$$|A_n| + |\mathcal{L}| + \aleph_0 \leq |A| + |\mathcal{L}| + \aleph_0 = \kappa$$
$$\therefore |\mathbf{Fml}_{\mathcal{L}(A_n)}| = (|A_n| + |\mathcal{L}| + \aleph_0)^{<\omega} \leq \kappa^{<\omega} = \kappa$$

各 $\varphi(x) \in \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}(A_n)}$ に対して，$\mathcal{M} \vDash \exists x \varphi(x)$ ならば $\mathcal{M} \vDash \varphi(a_\varphi)$ なる a_φ を一つずつ選び，A_n に付け加えて A_{n+1} とする．すなわち，

$$A_{n+1} := A_n \cup \{a_\varphi \in \mathcal{M} ; \varphi(x) \in \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}(A_n)}, \mathcal{M} \vDash \exists x \varphi(x) \Rightarrow \mathcal{M} \vDash \varphi(a_\varphi)\}$$

$|\mathbf{Fml}_{\mathcal{L}(A_n)}| \leq \kappa$ だったので付け加えられる元も κ 個以下であり，$|A_{n+1}| \leq \kappa$.

[*1] TeX を打つのが面倒という筆者の怠慢のために証明の詳細は省略.

上のようにして構成した $\{A_n; n < \omega\}$ に対し $\mathcal{N} := \bigcup_{n<\omega} A_n$ とおく．$|\mathcal{N}| \leq \kappa$ は明らかに成立する．

$\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$ を示す．$\mathcal{M} \models \exists x \varphi(x)$ なる $\varphi(x) \in \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}(\mathcal{N})}$ を任意にとる．$\mathcal{N} = \bigcup_{n<\omega} A_n$ より $\varphi(x)$ は適当な n に対し $\varphi(x) \in \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}(A_n)}$ となっている．A_{n+1} の定義より，$\mathcal{M} \models \varphi(a)$ なる $a \in A_{n+1} \subseteq \mathcal{N}$ が存在する．よって Tarski-Vaught test より $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$. ■

Theorem 3.4 (Löwenheim-Skolem の上昇定理)**.**

$\kappa \geq |\mathcal{M}| + |\mathcal{L}| + \aleph_0$ とする．$\mathcal{M}$ の基本拡大で濃度が κ のものが存在する．

Proof

まず，**Lemma 3.1** によって $\mathcal{M}^* \succ \mathcal{M}, |\mathcal{M}^*| \geq \kappa$ なる十分大きな構造 $\mathcal{M}^*$ を用意する．

$\mathcal{M} \subseteq A \subseteq \mathcal{M}^*, |A| = \kappa$ なる A をとる．Löwenheim-Skolem の下降定理より，$\mathcal{N} \prec \mathcal{M}^*$ で

$$A \subseteq \mathcal{N}, |\mathcal{N}| \leq |A| + |\mathcal{L}| + \aleph_0 = \kappa$$

なるものが存在する．ここで，$|\mathcal{N}| \geq |A| = \kappa$ と上の条件より $|\mathcal{N}| = \kappa$.

また，$\mathcal{M} \prec \mathcal{M}^*, \mathcal{M} \subseteq \mathcal{N} \prec \mathcal{M}^*$ であることから $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ がわかる．

以上で条件を満たす基本拡大 $\mathcal{N}$ が得られた． ■

参考文献

[1] 新井敏康 『数学基礎論』 岩波書店 2011.

[2] 田中一之（編） 『ゲーデルと 20 世紀の論理学 第 2 巻 完全性定理とモデル理論』 東京大学出版会 2006.

[3] 坪井明人 『モデルの理論』（数学基礎論シリーズ 3） 河合文化教育研究所/河合出版 1997.

[4] C. C. Chang and H. J. Keisler, Model Theory (third edition), Dover reprint, 2012.

[5] D. Marker, Model Theory: An Introduction, Graduate Texts in Mathematics 217, Springer, 2002.