「モデル理論入門」の入門

ぴあのん @piano2683

2012 年 9 月 8 日

概要

本資料は第二回関西すうがく徒のつどい一日目（9/8）における私，ぴあのんの発表「モデル理論入門」のための予備資料です．

「モデル理論入門」ではある程度の数理論理学の知識（一階述語論理の完全性定理・コンパクト性定理程度）を仮定してお話しします．しかし，初心者の方にも私の発表を聴いていただきたいので，必要な最低限の知識 $+\alpha$ をまとめました．たぶんこの予備資料を読んでいただけたら，当日の発表も雰囲気は感じ取っていただけるかと思います．

1　モデルとは？

モデル理論とはその名の通り“モデル”について研究する分野なので，まずは“モデル”の概念から説明していきましょう．まず，次のような公理を考えてみましょう．

$$\forall x \forall y \forall z((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$$
$$\forall x(e \cdot x = x \cdot e = x)$$
$$\forall x \exists y(x \cdot y = y \cdot x = e)$$

おなじみの群の公理ですね．数学では公理によって規定された数学的構造をもつ集合を研究の対象とします．上記の 3 つの公理を満たす集合のことを“群”と呼びますが，

$$T = \{\forall x \forall y \forall z((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)), \forall x(e \cdot x = x \cdot e = x), \forall x \exists y(x \cdot y = y \cdot x = e)\}$$

とおいてこれを数理論理学の言葉で言い換えると「公理系[*1] T のモデルのことを群と呼ぶ」という表現になります．つまり，“モデル”とは大雑把に言えば“公理系を満たすような構造が入った集合”のことを言います．

それでは，公理系とそのモデルの例をもう少し紹介しましょう．

Example 1.1.

次のような公理 φ を考えます．

$$\varphi : \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (x_1 \neq x_2 \wedge x_2 \neq x_3 \wedge x_3 \neq x_1)$$

これは“相異なる 3 つの元が取れる”ということを意味するので，3 つ以上の元をもつ任意の集合は公理 φ のモデルになります．

[*1] 数理論理学の用語では正確には**理論**と言います．

Example 1.2 (全順序集合の公理系).
次の公理系 LO を考えます．

$$\forall x(x \leq x)$$
$$\forall x \forall y(x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y)$$
$$\forall x \forall y \forall z(x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z)$$
$$\forall x \forall y(x \leq y \vee y \leq x)$$

すると，任意の全順序集合が公理系 LO のモデルになることがわかります．

上では簡単な公理系の例しか挙げていませんが，モデル理論でよく扱われるその他の公理系の例としては標数 p の代数的閉体の公理系 ACF_p，実閉体の公理系 RCF，次節で述べる“端点のない稠密な全順序集合”の公理系 DLO などがあります．

2　モデル理論の発想

それでは，モデル理論ではどのようなことを考えるかを見ていきましょう．
モデル理論は数理論理学の言葉によって記述されますが，数理論理学を使用することのメリットとしては，様々な公理系を統一的に扱うことが可能になることが第一に挙げられます．例えば，準同型写像（数学的構造を保つ写像）という概念は次のように一般化されます．

$\mathcal{L}$ を言語，$\mathcal{M}$,$\mathcal{N}$ を $\mathcal{L}$ 構造とする．写像 $\sigma : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ が**準同型**であるとは σ が次の条件を満たすことをいう：

- 任意の定数記号 $c \in \mathcal{L}$ に対し，
$$\sigma(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$$
- 任意の n 変数函数記号 $f \in \mathcal{L}$ と $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{M}$ に対し，
$$\sigma(f^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{N}}(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n))$$
- 任意の m 変数述語記号 $R \in \mathcal{L}$ と $a_1, \ldots, a_m \in \mathcal{M}$ に対し，
$$(a_1, \ldots, a_m) \in R^{\mathcal{M}} \Rightarrow (\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_m)) \in R^{\mathcal{M}}$$

この他にも，“部分群”や“代数閉包”など様々な代数的構造に関する概念が一般化されます．Chang&Keisler[4] の冒頭には次のように書かれています．

$$\text{普遍代数} + \text{数理論理学} = \text{モデル理論}$$

これはモデル理論の性質を非常に的確に表しています．代数的な構造のもつ普遍性を数理論理学の視点から調べるというのが，モデル理論の目標なのです．

2.1　モデルの存在

モデル理論において最初に問題となるのが“モデルの存在”です．例えば，次のような公理系のモデルは存在するのでしょうか？

$$T = \{\varphi; \mathbb{N} \vDash \varphi\} \cup \{c > n; n \in \mathbb{N}\}$$

ここで $\mathbb{N} \vDash \varphi$ は“φ が自然数論において真となる”ことを表しています．このように無限個の公理から成る公理系のモデルが存在するかどうかは，なかなか難しい問題のように思われます．そこでモデル理論の基本中の基本となる重要な定理である**コンパクト性定理**[*2]を用います．

Theorem 2.1 (コンパクト性定理)**.**
公理系 T がモデルをもつ．$\Leftrightarrow T$ の任意の有限部分 $T' \subseteq_{fin} T$ がモデルをもつ．

すると，上記の公理系 T の任意の有限部分に対して十分大きな n をとって $c = n$ とすればよいので，T の任意の有限部分が $\mathbb{N}$ をモデルにもちます．したがって，コンパクト性定理より T がモデルをもつことがわかります．しかし，$\mathbb{N}$ が T のモデルにならないことは明らかでしょう．このように，モデルをもつことが明らかでないような公理系のモデルの存在を示せることにコンパクト性定理の威力を垣間見ることができます[*3]．

ところで，先ほどの群の例のように具体的な構造から抽象的な性質を抜き出すことで，数学的本質を見極めた議論がしやすくなります．しかしその一方で，無限群や無限次元線型空間などのやや面倒な構造も出てきてしまいます．このような現象が一般に成立する，すなわち様々な濃度のモデルの存在を主張するのが次の Löwenheim-Skolem の定理です．

Theorem 2.2 (Löwenheim-Skolem の定理)**.**
公理系 T が無限モデルをもつとする．このとき十分大きな任意の無限基数 κ に対して，濃度が κ の T のモデルが存在する．

2.2 範疇性

前節において様々な濃度のモデルの存在を説明しました．それでは次に，どのような種類のモデルが存在するかを考えます．ここで重要となるのは**範疇的**という概念です．具体例を見ていきましょう．

全順序集合の公理系 LO に次の公理を加えたものを DLO [*4]とします．

$$\forall x \forall y (x < y \to \exists z (x < z < y))$$
$$\forall x \exists y \exists z (y < x < z)$$

すると，端点を持たない稠密な全順序集合（例えば $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$）は DLO のモデルとなります．ここで，次のような定理が成り立っています．

Theorem 2.3.
端点を持たない稠密な可算全順序集合は $\mathbb{Q}$ に順序同型となる．

つまり，DLO の可算モデルは本質的には一種類しかないのです．このことを“公理系 DLO は $\aleph_0$ 範疇的である”といいます．より一般に公理系 T と無限基数 κ に対して，濃度 κ の T のモデルが同型を除いて一意に定まるとき，T は κ 範疇的であるといいます．

このようにして，どのような種類のモデルが存在するかという問は，同型を除いて何種類のモデルが存在するかという問に還元されます．

[*2] コンパクト性定理はその名前から推察できるように，ある位相空間のコンパクト性を示しています．
[*3] ただ，この例では $\mathbb{N}$ に“いかなる自然数よりも大きな数 ∞”を付け加えた $\mathbb{N}^*$ を考えることにより，具体的に T のモデルを構成できます．
[*4] Dense Linear Order の略

3　モデル理論の研究の方向性

前節で範疇性という重要な概念について述べましたが，非可算範疇性については次の驚くべき定理が成立します．

Theorem 3.1 (Morley の範疇性定理)**.**
T を可算言語で記述された完全な公理系とする．このとき，T がある非可算濃度 κ で κ 範疇的ならば，任意の非可算濃度で範疇的となる．

この Morley の範疇性定理に対して，次のような公理系がそれぞれ存在します．

- 任意の無限基数に対して範疇的となる．
- 非可算範疇的だが，$\aleph_0$ 範疇的ではない．
- $\aleph_0$ 範疇的だが，非可算範疇的ではない．

そこで，このように濃度を指定したときのモデルの種類に応じて，公理系を分類しようというのがモデル理論の中心的な研究の方向性の一つです．

また，代数とのつながりが深いことから示唆されるように，モデル理論を代数に応用する研究も活発になされています．特に，Hrushovski によって見出されたモデル理論の代数幾何・数論幾何への応用は幾何的モデル理論と呼ばれ，未解決問題に新たな光を当てています．

この他にも，有限モデル理論や無限論理のモデル理論など，様々な方向に研究が発展しています．

4　用語に関する補足

最後に当日の発表で使用するロジックの用語・記号について，噛み砕いて解説します[*5]．

- 言語 $\mathcal{L}$：命題を表現するために用いられる記号のこと．$+, \times, \leq$ など．
- $\mathcal{L}$ 構造 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ ：何らかの構造（加法・乗法・順序など）が入った集合のこと．
- $\mathcal{L}$ 論理式 φ, ψ：命題や自由変数をもつ文を形式的に表現したもの．本資料では公理と呼んでいる．
- $\mathcal{M} \vDash \varphi$：“論理式 φ が構造 $\mathcal{M}$ において正しい”ということを表す．論理式の集合 T に対して，任意の T の要素 φ について $\mathcal{M} \vDash \varphi$ となることを $\mathcal{M} \vDash T$ と書き，「$\mathcal{M}$ は T のモデルである」と読む．

参考文献

[1] 新井敏康 『数学基礎論』 岩波書店 2011.

[2] 田中一之（編） 『ゲーデルと 20 世紀の論理学 第 2 巻 完全性定理とモデル理論』 東京大学出版会 2006.

[3] 坪井明人 『モデルの理論』（数学基礎論シリーズ 3） 河合文化教育研究所/河合出版 1997.

[4] C. C. Chang and H. J. Keisler, Model Theory (third edition), Dover reprint, 2012.

[5] D. Marker, Model Theory: An Introduction, Graduate Texts in Mathematics 217, Springer, 2002.

[*5] インフォーマルな説明なので多少不正確ですがご了承ください．