$\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$

ぺけ @PEKE_MATH2

Contents

0. はじめに

本稿は 2012 年 9 月 8 日に行われた「第 2 回関西すうがく徒のつどい」での発表「$\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$」をまとめたものです．本稿は発表の際に省略した部分を補い，聴講して頂いた方々に少しでも納得がいくようなものを目指しました．本稿の数学的誤りや日本語のおかしい部分，及び納得できない部分がありましたら，全て筆者の責任ですのでお気軽に筆者にご連絡ください．

1. イントロダクション

実数は有理数と無理数で構成されている．実数全体を $\mathbb{R}$，有理数全体を $\mathbb{Q}$ と書くと，

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$$

と書くことが出来る．つまり $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ が無理数全体である．実数の中で無理数がどれくらいあるのかを考えてみよう．$\mathbb{Q}$ は可算集合であり，$\mathbb{R}$ は非可算集合であるから，$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ は非可算集合である．つまり（大雑把にいうと）実数のうちほとんど全てが無理数であることになる．

ここで「与えられた実数が有理数か，それとも無理数かを判定せよ」という問題を考えるのは自然である．しかしこの問題は非常に難しいことが知られている．例えば以下に挙げる実数は有理数であるか無理数であるか知られていない．

$$e + \pi \; , \; \zeta(5) \; , \; \gamma := \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \right)$$

(ここで γ は Euler の定数と呼ばれている．また e^{π} は超越数，したがって無理数であることが知られている．)

次に (上の例でも登場した) 函数 $\zeta(s)$ について説明する．

Definition 1.1.

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \ \ (s \in \mathbb{C})$$

を Riemann のゼータ函数という．

$\zeta(s)$ は s の実部 1 より大きいところで絶対収束することが知られている．したがって 2 以上の整数 n に対して $\zeta(n)$ は意味を持つ．ここで次の問題を考えよう．

$$\zeta(n) \ \ (n \in \mathbb{Z}, n \geq 2) \ \ \text{は有理数か？無理数か？}$$

この問題の難しさは，n が偶数であるか奇数であるかについて全く異なる．

<u>k が偶数のとき</u>

$n = 2k$ $(k \geq 1)$ とおくと，次が成り立つことが知られている．(証明は省略するが，簡単な複素積分で証明できるので読者の演習問題とする．)

Theorem 1.2 (Euler)**.**

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k+1}(2\pi)^{2k-1}}{(2k)!} B_{2k}$$

ここで B_k は

$$B_0 := 1 \ , \ \ B_k = -\frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k+1}{i} B_i \ (k \geq 1)$$

で帰納的に定義される有理数で，*Bernoulli* 数と呼ばれる．

したがって π が超越数であることを認めると，この定理から ζ の 2 以上の偶数での値が無理数であることが分かる．ここで超越数とは，0 でないどんな有理数係数の多項式の根にならない複素数のことである．

一方で，ζ の 3 以上の奇数での値についてはほとんど何も知られていない．

<u>k が奇数のとき</u>

ζ の 3 以上の奇数での値について，例えば次のようなことが知られている．

(1) $\zeta(3)$ は無理数である．(Apéry , 1978)

(2) 集合 $\{\zeta(2k+1) | k = 1, 2, 3, \cdots\}$ の中に無限個の無理数が存在する．(Rivoal , 2000)

(3) $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ のうち，少なくとも 1 つは無理数である．(Zudilin , 2001)

つまり 5 以上の奇数 k に対して，$\zeta(k)$ が有理数であるか無理数であるかはまだ知られていない．

本稿では $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$ であることを F.Beukers の方法によって証明する．

2. 準備

この節では無理数であることの必要条件，及び主定理の証明のために必要な事実を証明する．有理数ではない実数のことを無理数というが，これらの 2 つの数の区別の仕方は様々ある．ここでは有理数による近似の度合いに着目する．

Theorem 2.1.
任意の $\alpha \in \mathbb{Q}$ に対して，*(*α *に依存した)* 定数 $c = c(\alpha)$ が存在し，不等式

$$|\alpha - \frac{p}{q}| > \frac{c}{q}$$

が全ての有理数 $p/q \neq \alpha$ $(q > 0)$ に対して成り立つ．

Proof.
$\alpha = a/b$ $(b > 0)$ とする．このとき全ての有理数 $p/q \neq \alpha$ は，不等式

$$|q\alpha - p| = \frac{|aq - bp|}{b} \geq \frac{1}{b}$$

を満たす．ここで 0 でない整数の絶対値は 1 以上であることを用いた．よって

$$\frac{1}{b} > c > 0$$

と c をとればよい． □

この定理は「有理数は異なる有理数であまりよく近似されない」ということを主張している．したがって無理数とは,「有理数で何処までも近似できる実数である」と考えることが出来る．つまり，この定理の対偶をとることで次が成り立つ．

Corollary 2.2.
実数 α に対して，次の (1)(2) 満たす整数列 $\{p_n\}, \{q_n\}$ が存在すれば無理数である．

(1) 全ての $n \geq 0$ に対して $q_n\alpha - p_n \neq 0$ である．

(2) $n \to \infty$ のとき $|q_n\alpha - p_n| \to 0$ である．

Example 2.3.

(1) 自然対数の底（ネイピア数）

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

は無理数である．実際,

$$p_n := n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\ ,\quad q_n := n!$$

とおくと $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$ で,

$$\begin{aligned}
0 &< q_n e - p_n \\
&= n! \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots \\
&= \frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots\right) \\
&< \frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right) = \frac{2}{n+1} \to 0\ (n \to \infty)
\end{aligned}$$

が成り立つ．(実は e は超越数である．)

(2) Liouville 数

$$\alpha := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k!}}$$

は無理数である． 実際

$$p_n = 2^{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k!}}\ ,\quad q_n := 2^{n!}$$

とおくと $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$ で,

$$\begin{aligned}
0 &< q_n \alpha - p_n \\
&= 2^{n!} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k!}} \\
&= \frac{1}{2^{(n+1)!-n!}} + \frac{1}{2^{(n+2)!-n!}} + \frac{1}{2^{(n+3)!-n!}} + \cdots
\end{aligned}$$

となるが，帰納的に

$$(n+k)! - n! \geq n!k\ \ (k \geq 1)$$

であるので，結局

$$\begin{aligned} 0 &< q_n\alpha - p_n \\ &< \frac{1}{2^{n!}} + \frac{1}{2^{2\cdot n!}} + \frac{1}{2^{3\cdot n!}} + \cdots \\ &= \frac{1}{2^{n!}-1} \to 0 \ \ (n \to \infty) \end{aligned}$$

が成り立つ．(この α も超越数であることが知られている．この数は世界で初めて超越数であると Liouville によって証明された数である．)

(3) 同様の方法で，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{d^n}} \ \ (d \geq 2 \text{ は整数}) \ \ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}}$$

も無理数であることが分かる．また (2)(3) の例において，2 を 2 以上の整数 a に置き換えてもやはり無理数であることが証明できる．

したがって $\zeta(3)$ が無理数であることを示すには，上述の例のように Corollary の条件を満たすような整数列 $\{p_n\}, \{q_n\}$ を具体的に見つければよい．

次に $\zeta(3)$ に対して $\{p_n\}, \{q_n\}$ を構成する上で必要となる補題を 2 つ紹介する．

Lemma 2.4.
r, s を非負整数とする．このとき

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\log xy}{1-xy} x^r y^s dxdy = \begin{cases} 2\left(\zeta(3) - 1 - \dfrac{1}{2^3} - \cdots - \dfrac{1}{(r-1)^3}\right) & (r = s) \\ \dfrac{-1}{r-s}\left(\dfrac{1}{(s+1)^2} + \dfrac{1}{(s+2)^2} \cdots + \dfrac{1}{r^2}\right) & (r > s) \end{cases}$$

が成り立つ．

Proof. 主張の左辺は広義積分であるから，まずこの広義積分が収束することを示そう．点 $(1,1)$ を中心とする半径 R $(0 < R < 1/2)$ の円の内部（境界を含む）と $[0,1]^2$ の共通部分を B とし，A を $[0,1]^2$ から B を取り除いた部分に円周を付け加えた領域とする．領域 A, B で積分が収束することを示せば良い．

(1) $\varepsilon > 0$ に対し $A_\varepsilon := [\varepsilon, 1]^2 \cap A$ とおく．A_ε 上では

$$|x^r y^s| \leq 1 \ \ , \ \ |1 - xy| \geq C > 0$$

であるから，被積分函数を $f(x,y)$ とおくと，$\varepsilon\to+0$ のとき

$$\begin{aligned}\left|\int\int_{A_\varepsilon} f(x,y)dxdy\right| &\leq \frac{1}{C}\int\int_{A_\varepsilon}|\log(xy)|dxdy\\ &\leq \frac{1}{C}\int\int_{[\varepsilon,1]^2}-\log(xy)dxdy\\ &= \frac{2}{C}\int_\varepsilon^1 -\log x dx\\ &= \frac{2}{C}(1+\varepsilon\log\varepsilon-\varepsilon)\to\frac{2}{C}<\infty\end{aligned}$$

となる．したがって $\int\int_{A_\varepsilon} fdxdy$ は ε に関して単調増加で上に有界な数列をなすから収束する．

(2) B において

$$|\log(xy)|\leq^\exists D<+\infty \ \ , \ \ |x^ry^s|\leq 1$$

であるから，

$$\int\int_B f(x,y)dxdy \leq D\int\int_B\frac{dxdy}{1-xy}$$

となるので，この右辺が収束することを示せば良い．

$$x' := 1-x \ \ , \ \ y' := 1-y$$

と変数変換する．このとき領域 B は，原点を中心とする半径 R の円の内部（境界を含む）と $[0,1]^2$ の共通部分 B' に全単射で移る．すると

$$\int\int_B\frac{dxdy}{1-xy}=\int\int_{B'}\frac{dx'dy'}{1-(1-x')(1-y')}=\int\int_{B'}\frac{dx'dy'}{x'+y'-x'y'}$$

となる．次に $\varepsilon>0$ に対して，B'_ε を B' から原点中心の半径 ε の円の内部（境界を含まない）を除いた領域とする．このとき，極座標変換すると

$$\begin{aligned}\int\int_{B'}\frac{dx'dy'}{x'+y'-x'y'} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_\varepsilon^R\frac{drd\theta}{\cos\theta+\sin\theta-r\sin\theta\cos\theta}\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_\varepsilon^R\frac{drd\theta}{\sin\theta+\cos\theta(1-r\sin\theta)}\end{aligned}$$

となる．ここで $0\leq\sin\theta\leq 1, 0<r<R<1$ であるから，$1-r\sin\theta>1-R=: E>0$ を得る．したがって

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_\varepsilon^R\frac{drd\theta}{\sin\theta+\cos\theta(1-r\sin\theta)} &< \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_\varepsilon^R\frac{drd\theta}{\sin\theta+D\cos\theta}\\ &= (R-\varepsilon)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sin\theta+D\cos\theta}\end{aligned}$$

となる．最後の積分は有限値になることが直ぐに分かるので，その値を E とおくと，

$$(R-\varepsilon)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin\theta + E\cos\theta} < (R-\varepsilon)^{\exists}F \to RF\ (\varepsilon \to +0)$$

となって収束する．したがって f は B 上可積分であることが示された．

次に $\sigma \geq 0$ に対して

$$g(\sigma) := \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{\sigma+r}y^{\sigma+s}}{1-xy}dxdy$$

とおく．$\frac{1}{1-xy}$ は $[0,1]^2$ で広義一様収束するから，級数展開すると

$$g(\sigma) = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\sigma+r}y^{k+\sigma+s}dxdy$$

となる．ここで $x^{k+\sigma+r}y^{k+\sigma+s}$ は $[0,1]^2$ で微分可能で広義一様収束するから，積分と無限和が交換可能で

$$\begin{aligned} g(\sigma) &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 x^{k+\sigma+r}y^{k+\sigma+s}dxdy \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+\sigma+r+1)(k+\sigma+s+1)} \end{aligned}$$

を得る．さらに

$$g(\sigma) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{\sigma+r}y^{\sigma+s}}{1-xy}dxdy$$

を σ で微分しよう．まず $g(\sigma)$ が収束することは $f(x,y)$ の収束性と同様に示せる．次に

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{x^{\sigma+r}y^{\sigma+s}}{1-xy}\right) = \frac{\log(xy)}{1-xy}x^{\sigma+r}y^{\sigma+s}$$

であるからこれも可積分である．したがって微分と積分の交換が可能で

$$\frac{dg(\sigma)}{d\sigma} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\log(xy)}{1-xy}x^{\sigma+r}y^{\sigma+s}dxdy$$

を得る．ここで左辺の微分を考えると

(1) $r > s$ の場合．このときは

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+\sigma+r+1)(k+\sigma+s+1)} \\ &= \frac{1}{r-s}\left(\frac{1}{\sigma+s+1} + \cdots + \frac{1}{\sigma+r}\right) \end{aligned}$$

であるから，これを σ で微分すると

$$\frac{dg(\sigma)}{d\sigma}=\frac{-1}{r-s}\left(\frac{1}{(\sigma+s+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(\sigma+r)^2}\right)$$

となる．以上より $\sigma=0$ として望みの式を得る．

(2) $r=s$ の場合，このとき

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+\sigma+r+1)^2}$$

は σ に関して一様収束するので項別微分可能で，

$$\frac{dg(\sigma)}{d\sigma}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-2}{(k+\sigma+r+1)^3}$$

を得る．したがって $\sigma=0$ とすれば望みの式を得る．

□

Lemma 2.5.
n を 1 以上の整数とし，d_n を 1 から n の最小公倍数とする．このとき n を十分大きくとると

$$d_n<3^n$$

が成り立つ．

Proof.
この補題の証明は長いのでいくつかのステップに分けて証明する．まず

$$\begin{cases} a_1 := 2 \\ a_{n+1} := a_1a_2\cdots a_n+1\ (n\geq 1)\end{cases}$$

なる整数列 $\{a_n\}$ を考える．

Step1

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=1\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log a_n}{a_n}<1.08241$$

が成り立つ．

実際，

$$\begin{aligned}a_n+1&=(a_1\cdots a_{n-1})a_n+1\\&=(a_n-1)a_n+=a_n^2-a_n+1\ (n\geq 1)\end{aligned}$$

で $a_n > 1$ より

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n^2 - a_n} = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_n - 1}$$

これより

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1 - 1} = 1$$

を得る．次に $a_{n+1} = a_n^2 - (a_n - 1) < a_n^2$ より $\log a_{n+1} < 2 \log a_n$ なので

$$\frac{\log a_{n+1}}{a_{n+1}} \cdot \frac{a_n}{\log a_n} < 2 \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

となる．ここで $n \geq 3$ のとき $a_n \geq 5$ であり，このとき

$$a_n^2 - 5a_n + 1 = a_n(a_n - 5) + 1 \geq 1 > 0$$

つまり $4a_n < a_n^2 - a_n + 1 = a_{n+1}$，したがって $a_n/a_{n+1} < 1/4$ である．これより $n \geq 3$ のとき

$$\frac{\log a_{n+1}}{a_{n+1}} \cdot \frac{a_n}{\log a_n} < 2 \frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{1}{2}$$

であるから，

$$\begin{aligned} \sum_{n=6}^{\infty} \frac{\log a_n}{a_n} &= \frac{\log a_6}{a_6} + \frac{\log a_7}{a_7} + \frac{\log a_8}{a_8} + \cdots \\ &= \frac{\log a_6}{a_6} \left(1 + \frac{\log a_7}{a_7} \frac{a_6}{\log a_6} + \frac{\log a_8}{a_8} \frac{a_7}{\log a_7} \frac{\log a_7}{a_7} \frac{a_6}{\log a_6} + \cdots \right) \\ &< \frac{\log a_6}{a_6} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots \right) = 2 \frac{\log a_6}{a_6} < 0.00001 \end{aligned}$$

を得る．ここで最後の不等式は計算機によるものである．以上より計算機を使うと

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log a_n}{a_n} < \sum_{n=1}^{5} \frac{\log a_n}{a_n} + 0.00001 < 1.08241$$

が成り立つことが分かる．

<u>Step2</u>

任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$[x] - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{[x]}{a_n} \right] \geq 1$$

が成り立つ．実際 $x \in \mathbb{R}$ に対し $k = k(x) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を

$$a_k \leq x < a_{k+1}$$

を満たす唯一の正整数とすると

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{[x]}{a_n}\right]=\sum_{n=1}^{k}\left[\frac{[x]}{a_n}\right]$$

である．ここで

$$x=q_na_n+r_n\ ,\ \ (q_n\in\mathbb{Z},0\leq r_n\leq a_n-1)$$

とおくと，

$$\frac{x}{a_n}=q_n+r_n\ \ \left(0\leq\frac{r_n}{a_n}<\frac{a_n-1}{a_n}<1\right),\ \ [x]=q_na_n$$

より

$$\frac{[x]}{a_n}=\left[\frac{[x]}{a_n}\right]=q_n$$

が成り立つ．したがって

$$\sum_{n=1}^{k}\left[\frac{[x]}{a_n}\right]=\sum_{n=1}^{k}\frac{[x]}{a_n}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[x]}{a_n}=[x]$$

を得る．ここで最後の等式は Step1 を用いた．よって両辺整数なので，その差は 1 以上である．

<u>Step3</u>

$$c_n:=\frac{n!}{\left[\frac{n}{a_1}\right]!\cdots\left[\frac{n}{a_k}\right]!}\ ,\ \ (k=k(n),n\in\mathbb{Z}_{\geq1})$$

とおく．ことのき全ての n に対して $d_n|c_n$（特に $d_n\leq c_n$）が成り立つことを示そう．

　まず一般に $m\in\mathbb{Z}_{\geq1}$ に対し，$m!$ における素数 p のベキ指数は α_p は

$$\alpha_p=\left[\frac{m}{p}\right]+\left[\frac{m}{p^2}\right]+\cdots$$

で与えられることに注意する．また d_n の定義より

$$d_n=\prod_{p\leq n}p^{[\log_p n]}$$

と書ける．ここで積は n 以下の素数 p 全てを走る．c_n における p のベキ指数を $\alpha_p(n)$ をおくと，

$$\begin{aligned}\alpha_p(n) &= \sum_{i=1}^{[\log_p n]} \left(\left[\frac{n}{p^i}\right] - \left[\frac{n/a_1}{p^i}\right] - \left[\frac{n/a_2}{p^i}\right] - \cdots \right) \\ &\geq \sum_{i=1}^{[\log_p n]} 1 = [\log_p n]\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで上の不等号は Step2 の不等式を $x = n/p^i$ $(1 \leq i \leq [\log_p n])$ に適用することで得られる．よって $c_n = \prod_{p \leq n} p^{[\log_p n]}$(ただし積は n 以下の全ての素数 p を走る) であるから，上の不等式より全ての n に対して $d_n | c_n$ が成り立つ．

したがって十分大きい n に対して $c_n < 3^n$ が成り立つことを示せば良い．

<u>Step4</u>

$$\frac{\left(\dfrac{n}{a_i}\right)^{\frac{n}{a_i}}}{\left[\dfrac{n}{a_i}\right]^{\left[\frac{n}{a_i}\right]}} < \left(\frac{en}{a_i}\right)^{1-\frac{1}{a_i}} \quad (1 \leq i \leq k)$$

が成り立つ．実際 $n = a_i$ の時は明らかなので $n < a_i$ とする．

$$n = q_i a_i + r_i \ , \ \ 0 \leq r_i \leq a_i - 1$$

とすると $q = [n/a_i]$ より

$$\frac{n-r}{a_i} = \left[\frac{n}{a_i}\right]$$

となる．これより

$$\begin{aligned}\left[\frac{n}{a_i}\right] \geq \frac{n-a_i+1}{a_i} &= \frac{n}{a_i}\frac{n-a_i+1}{n} = \frac{n}{a_i}\left(\frac{n}{n-a_i+1}\right)^{-1} \\ &= \frac{n}{a_i}\left(1 + \frac{a_i-1}{n-a_i+1}\right)^{-1}\end{aligned}$$

を得る．ここで連続函数 $f(x) = x^x$ $(x > 0)$ は $x > e^{-1}$ では単調増加であるので，上の不等式から

$$\left[\frac{n}{a_i}\right]^{\left[\frac{n}{a_i}\right]} \geq \left(\frac{n-a_i+1}{a_i}\right)^{\frac{n-a_i+1}{a_i}}$$

である．これより

$$
\begin{aligned}
\frac{\left(\dfrac{n}{a_i}\right)^{\frac{n}{a_i}}}{\left[\dfrac{n}{a_i}\right]^{\left[\frac{n}{a_i}\right]}} &\leq \frac{\left(\dfrac{n}{a_i}\right)^{\frac{n}{a_i}}}{\left(\dfrac{n-a_i+1}{a_i}\right)^{\left(\frac{n-a_i+1}{a_i}\right)}} \\
&= \left(\frac{n}{a_i}\right)^{\frac{n}{a_i}} \left(\frac{n}{a_i}\left(1+\frac{a_i-1}{n-a_i+1}\right)^{-1}\right)^{-\frac{n-a_i+1}{a_i}} \\
&= \left(\frac{n}{a_i}\right)^{\frac{n}{a_i}-\frac{n-a_i+1}{a_i}} \left(1+\frac{a_i-1}{n-a_i+1}\right)^{\frac{n-a_i+1}{a_i-1}\frac{a_i-1}{a_i}} \\
&< \left(\frac{en}{a_i}\right)^{1-\frac{1}{a_i}}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ここで最後の不等式は $(1+1/x)^x < e\ (x>0)$ を用いた．

Step5

十分大きい n に対して $c_n < 3^n$ を示そう．

$$
t := \left[\frac{n}{a_1}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{a_k}\right]
$$

とおくと

$$
\begin{aligned}
t^t &= \left(\left[\frac{n}{a_1}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{a_k}\right]\right)^t \\
&= \sum_{\substack{u_1,\cdots,u_k \geq 0 \\ u_1+\cdots+u_k=t}} \frac{t!}{u_1!\cdots u_k!}\left[\frac{n}{a_1}\right]^{u_1}\cdots\left[\frac{n}{a_k}\right]^{u_k} \\
&> \frac{t!}{\left[\dfrac{n}{a_1}\right]!\cdots\left[\dfrac{n}{a_k}\right]!}\left[\frac{n}{a_1}\right]^{u_1}\cdots\left[\frac{n}{a_k}\right]^{u_k}
\end{aligned}
$$

であるから，Step4 より

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{n!}{\left[\frac{n}{a_1}\right]! \cdots \left[\frac{n}{a_k}\right]!} = \frac{n(n-1)\cdots(t+1)t!}{\left[\frac{n}{a_1}\right]! \cdots \left[\frac{n}{a_k}\right]!} \\
&< \frac{n(n-1)\cdots(t+1)t^t}{\left[\frac{n}{a_1}\right]^{\left[\frac{n}{a_1}\right]} \cdots \left[\frac{n}{a_k}\right]^{\left[\frac{n}{a_k}\right]}} \\
&< \frac{n^n}{\left[\frac{n}{a_1}\right]^{\left[\frac{n}{a_1}\right]} \cdots \left[\frac{n}{a_k}\right]^{\left[\frac{n}{a_k}\right]}} \\
&< \frac{n^n \left(\frac{en}{a_1}\right)^{1-\frac{1}{a_1}} \cdots \left(\frac{en}{a_k}\right)^{1-\frac{1}{a_k}}}{\left(\frac{n}{a_1}\right)^{\frac{n}{a_1}} \cdots \left(\frac{n}{a_k}\right)^{\frac{n}{a_k}}}
\end{aligned}
$$

を得る．したがって log をとると

$$
\begin{aligned}
\log c_n &< n\log n + \sum_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{a_i}\right)\left(1+\log\frac{n}{a_i}\right) - \sum_{i=1}^{k}\frac{n}{a_i}\log\frac{n}{a_i} \\
&< n\log n + k(1+\log n) - (n\log n)\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i} + n\sum_{i=1}^{k}\frac{\log a_i}{a_i}
\end{aligned}
$$

を得る．ここで

(1)

$$
\begin{aligned}
1-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i} = \sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{1}{a_i} &= \frac{1}{a_{k+1}}\left(1+\frac{a_{k+1}}{a_{k+2}}+\cdots\right) \\
&< \frac{1}{a_{k+1}}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\right) = \frac{2}{a_{k+1}} < \frac{2}{n}
\end{aligned}
$$

を得る．((1) おわり) また

(2)

$$
k < \log_2 \log_2 n + 2
$$

が成り立つ．実際 $k=3$ のとき $a_3 = 7 > 2^{2^1}+1$ で正しく，$k>3$ の時は帰納法で

$$
\begin{aligned}
a_k &= a_{k-1}(a_{k-1}-1)+1 \\
&> (2^{2^{k-3}}-1)2^{2^{k-3}}+1 \\
&> (2^{2^{k-3}})^2+1 \\
&= 2^{2^{k-2}}+1
\end{aligned}
$$

が成り立つ．したがって

$$\log_2 \log_2 n > k-2\ ,\ \ k < \log_2 \log_2 n + 2$$

を得る ((2) おわり)．これと Step1 から

$$\begin{aligned}\log c_n &< (n\log n)\left(1-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i}\right)+k(1+\log n)+n\sum_{i=1}^{k}\frac{\log a_i}{a_i}\\ &< 2\log n+(1+\log n)(\log_2\log_2 n+2)+1.08241n\end{aligned}$$

を得る．ここで十分大きい n に対して

$$2\log n+(1+\log n)(\log_2\log_2 n+2) < 0.00001n$$

が成り立つので，

$$\log c_n < 1.08242n$$

つまり

$$c_n < e^{1.08242n} < 3^n$$

が成り立つ．

□

3. 主定理の証明

以上の準備のもと主定理の証明をする．広義積分

$$I_n := \int_0^1\int_0^1 \frac{-\log(xy)}{1-xy}P_n(x)P_n(y)dxdy$$

を考える．ここで

$$P_n(x) := \frac{d^n}{dx^n}(x^n(1-x)^n)$$

は n 次の Legendre 多項式である．これが収束することは Lemma1 と同様に示せる．二項展開して微分を実行すると

$$\begin{aligned}P_n(x) &= \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k x^{n+k}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}(-1)^k x^k\end{aligned}$$

であるから，$P_n(x), P_n(y)$ は整数係数の n 次多項式である．したがって Lemma1 から，各 n に対し

$$d_n^3 I_n = q_n\zeta(3) - p_n$$

を満たす整数 p_n, q_n が存在する．(つまり $P_n(x)P_n(y)$ は x, y の整数係数の多項式であるから，各項に Lemma1 を適用して $\zeta(3)$ の部分とそうでない部分に分ける．最後に d_n^3 で分母を消せば p_n, q_n を得る．) また被積分函数は積分す

るの領域で 0 ではないから I_n，つまり $q_n\zeta(3) - p_n$ は全ての n に対して 0 ではないことに注意する．

次に I_n を変形して上から評価しよう．

$$\int_0^1 \frac{1}{1-(1-xy)z}dz = \frac{-\log(xy)}{1-xy}$$

であるから，

$$I_n = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{P_n(x)P_n(y)}{1-(1-xy)z}dxdydz$$

となる．この積分を x について n 回部分積分すると（$P_n(x)$ が n 回微分で定義されていたことを思い出そう！）

$$I_n = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{(xyz)^n(1-x)^nP_n(y)}{(1-(1-xy)z)^{n+1}}dxdydz$$

となる．ここで Leibniz 則を用いた．次に

$$w = \frac{1-z}{1-(1-xy)z}$$

とおく．w は z について減少函数で z, w は対称であることが直ぐに分かる．

$$dz = \frac{-xy}{(1-(1-xy)w)^2}dw$$

であるから，

$$I_n = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{(1-x)^n(1-y)^nP_n(y)}{1-(1-xy)w}dxdydw$$

と計算できる．これをさらに y について n 回部分積分すると，

$$I_n = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{(x(1-x)y(1-y)w(1-w))^n}{(1-(1-xy)w)^{n+1}}dxdydw$$

を得る．ここで

$$f(x,y,w) := \frac{x(1-x)y(1-y)w(1-w)}{1-(1-xy)w}\ ,\quad (0 < x,y,w < 1)$$

とおくと

$$0 < f(x,y,w) \leq f(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1, \frac{1}{\sqrt{2}}) = (\sqrt{2}-1)^4$$

が成り立つ．これと Lemma1 から

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{f(x,y,w)^n}{1-(1-xy)w}dxdydw \\
&\leq (\sqrt{2}-1)^{4n}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1-(1-xy)w}dxdydw \\
&= (\sqrt{2}-1)^{4n}\int_0^1\int_0^1 \frac{-\log(xy)}{1-xy}dxdy \\
&= (\sqrt{2}-1)^{4n}\cdot 2\zeta(3)
\end{aligned}$$

を得る．以上のことと Lemma2 を合わせると

$$\begin{aligned}
0 < q_n\zeta(3)-p_n = d_n^3 I_n &\leq 2\zeta(3)d_n^3(\sqrt{2}-1)^{4n} \\
&< 2\zeta(3)27^n(\sqrt{2}-1)^{4n} \\
&< 2\zeta(3)\left(\frac{4}{5}\right)^n \longrightarrow 0 \quad (n\longrightarrow\infty)
\end{aligned}$$

が成立する．以上で $\zeta(3)\notin\mathbb{Q}$ が示された．

References

[Be] F. Beukers, A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$, Bull. London Math. Soc. **11** (3) (1979), pp. 268-272.

[Ha] D. Hanson, On the product of the primes, Canad. Math. Bull. Vol. **15** (1) (1972), pp. 33-38.