ホモトピー群、CW 近似、Eilenberg-MacLane 空間

@__ sappy __（アンダーバーを前後に 2 個ずつ）

2012 年 9 月 9 日

位相空間を調べたい

目的

位相空間 X を調べたい。ホモトピー同値という粗い見方で。

$x_0 \in X$ を定めておく。これを X の基点という

位相空間を調べたい

目的

位相空間 X を調べたい。ホモトピー同値という粗い見方で。

$x_0 \in X$ を定めておく。これを X の基点という

- 情報量と扱いやすさの両方をもつ道具がほしい

位相空間を調べたい

目的

位相空間 X を調べたい。ホモトピー同値という粗い見方で。

$x_0 \in X$ を定めておく。これを X の基点という

- 情報量と扱いやすさの両方をもつ道具がほしい

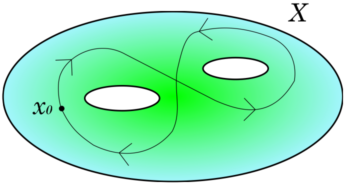
定義

$\pi_1(X, x_0) := \{f : [0,1] \to X \mid f(0) = f(1) = x_0\}/$ホモトピー

$$f \sim g : [0,1] \to X \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists H : [0,1] \times I \to X \text{ s.t.} \begin{cases} H(s,0) = f(s) \\ H(s,1) = g(s) \end{cases}$$

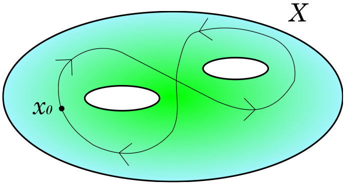
基本群

x_0 を出発して x_0 に帰ってくる X 内の 1 時間の散歩を考える。
($f : S^1 \to X$ という連続写像)

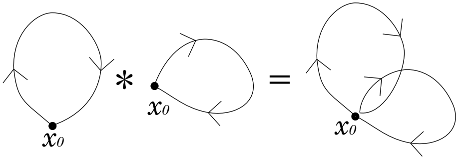


基本群

x_0 を出発して x_0 に帰ってくる X 内の 1 時間の散歩を考える。
$(f : S^1 \to X$ という連続写像$)$

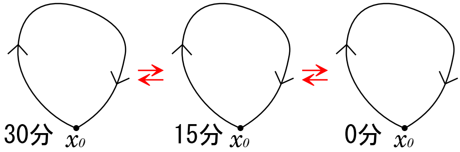


- $\pi_1(X, x_0)$ には自然な積が入る。



単位元と逆元

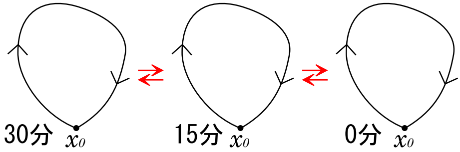
- e をずっと x_0 にいる散歩（？）とする。



$$e * \ell = \ell$$

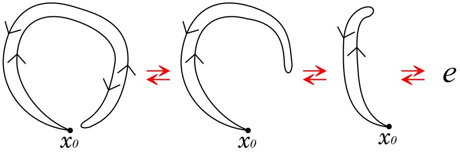
単位元と逆元

- e をずっと x_0 にいる散歩（？）とする。



$$e * \ell = \ell$$

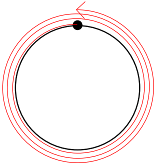
- ℓ を逆にたどる散歩がある（ℓ^{-1} と書く）。



$$\ell * \ell^{-1} = e$$

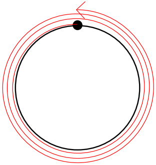
$\pi_1(X, x_0)$ の例

$\pi_1(S^1, x_0)$ の元は最終的に円周を何周回ったかを意味する。



$\pi_1(X, x_0)$ の例

$\pi_1(S^1, x_0)$ の元は最終的に円周を何周回ったかを意味する。



命題

$\pi_1(S^1, x_0) = \{$ 反時計回りに n 周 $\mid n \in \mathbb{Z}$ (整数) $\} \cong \mathbb{Z}$

弧状連結な空間の場合、$\pi_1(X, x_0)$ は基点 x_0 のとり方に依らない。

n 次のホモトピー群

定義

n 次のホモトピー群

$$\pi_n(X, x_0) := \{f : S^n \to X \mid f(*) = x_0\}/\textbf{ホモトピー}$$

$$f \sim g : S^n \to X \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists H : S^n \times I \to X \text{ s.t.} \begin{cases} H(x, 0) = f(x) \\ H(x, 1) = g(x) \end{cases}$$

n 次のホモトピー群

定義

n 次のホモトピー群

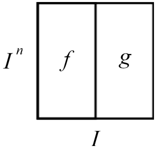
$$\pi_n(X, x_0) := \{f : S^n \to X \mid f(*) = x_0\}/\text{ホモトピー}$$

$$f \sim g : S^n \to X \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists H : S^n \times I \to X \text{ s.t.} \begin{cases} H(x, 0) = f(x) \\ H(x, 1) = g(x) \end{cases}$$

- やはり群構造が入る
- X の“ n 次元の穴（？）”の情報
- 弧状連結な空間の場合、$\pi_n(X, x_0)$ は基点 x_0 のとり方に依らない。
- その場合には $\pi_0(X) = 0$

積構造

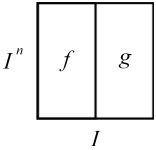
$f : S^n \to X$ を $f : I^n \to X$ s.t. $f(\partial I^n) = x_0$ だと思って、



で積を定める。

積構造

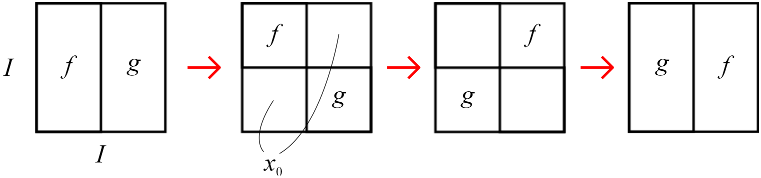
$f : S^n \to X$ を $f : I^n \to X$ s.t. $f(\partial I^n) = x_0$ だと思って、



で積を定める。

注意

$\pi_n(X)$ は $n \geq 2$ では可換。



ホモトピー群

定義

$$\pi_*(X) := \bigoplus_{n\geq 0} \pi_n(X)$$ をホモトピー群と呼ぶ。

- 群なので扱いやすい
- “ 普通 ”の空間に対して、十分な情報量

ホモトピー群

定義

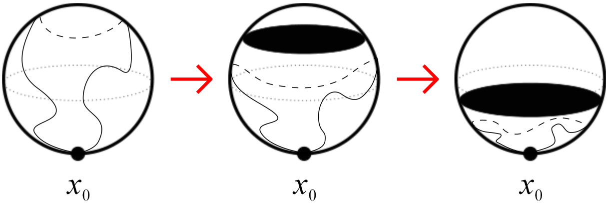
$$\pi_*(X) := \bigoplus_{n\geq 0} \pi_n(X)$$ をホモトピー群と呼ぶ。

- 群なので扱いやすい
- “ 普通 ”の空間に対して、十分な情報量

命題

$\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$. $m < n$ なら $\pi_m(S^n) = 0$

$m = 1, n = 2$ の図



連続写像から群準同型写像へ

連続写像 $f : X \to Y$

$\Downarrow$

連続写像から群準同型写像へ

連続写像 $f : X \to Y$

$\Downarrow$

群準同型写像 $f_* : \pi_*(X) \to \pi_*(Y)$

$[\alpha] \in \pi_n(X)$ を $\alpha : S^n \to X$ によって代表される元とすると、
$f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$

連続写像から群準同型写像へ

$$\textbf{連続写像 } f : X \to Y$$
$$\Downarrow$$
$$\textbf{群準同型写像 } f_* : \pi_*(X) \to \pi_*(Y)$$

$[\alpha] \in \pi_n(X)$ **を** $\alpha : S^n \to X$ **によって代表される元とすると、**
$f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$

$$S^n \xrightarrow{\alpha} X$$

連続写像から群準同型写像へ

連続写像 $f : X \to Y$

$$\Downarrow$$

群準同型写像 $f_* : \pi_*(X) \to \pi_*(Y)$

$[\alpha] \in \pi_n(X)$ **を** $\alpha : S^n \to X$ **によって代表される元とすると、**
$f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$

$$S^n \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{f} Y$$

連続写像から群準同型写像へ

$$\textbf{連続写像 } f : X \to Y$$
$$\Downarrow$$
$$\textbf{群準同型写像 } f_* : \pi_*(X) \to \pi_*(Y)$$

$[\alpha] \in \pi_n(X)$ **を** $\alpha : S^n \to X$ **によって代表される元とすると、**
$f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$

$$S^n \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{f} Y$$

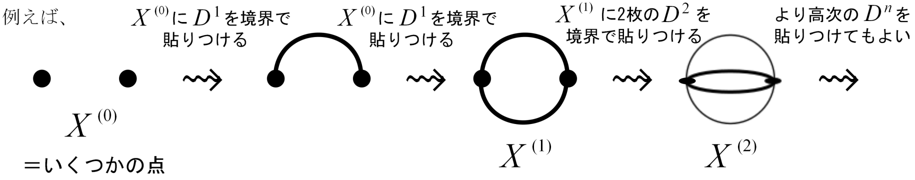
位相空間と
連続写像の世界

$\Rightarrow$

群と
準同型の世界

CW 複体

D^{n+1} とその境界 S^n を用いて、様々な空間を作れる。



このようにして作られた空間を CW 複体という。

CW 複体の　すごい　性質

CW 複体の　すごい　性質

一般に連続写像 $f : X \to Y$ に対し、

- f : ホモトピー同値 $\Rightarrow f_* : \pi_*(X) \to \pi_*(Y)$ が同型

CW 複体の　すごい　性質

一般に連続写像 $f : X \to Y$ に対し、

- f : ホモトピー同値 $\Rightarrow f_* : \pi_*(X) \to \pi_*(Y)$ が同型

であるが、CW 複体についてはその逆も成立する。

- f : ホモトピー同値 $\Leftarrow f_* : \pi_*(X) \to \pi_*(Y)$ が同型

CW 複体の　すごい　性質

一般に連続写像 $f : X \to Y$ に対し、

- f : ホモトピー同値 $\Rightarrow f_* : \pi_*(X) \to \pi_*(Y)$ が同型

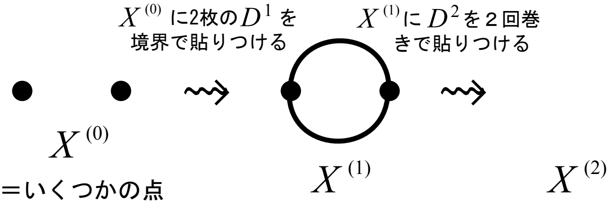
であるが、CW 複体についてはその逆も成立する。

- f : ホモトピー同値 $\Leftarrow f_* : \pi_*(X) \to \pi_*(Y)$ が同型

つまり、ホモトピー群の情報だけで空間のことが分かる。

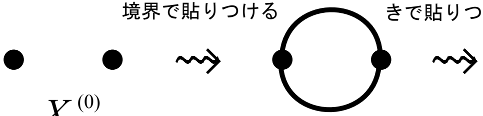
他の CW 複体の例

n 次元球面の作り方は上で分かったと思う。他の空間の例



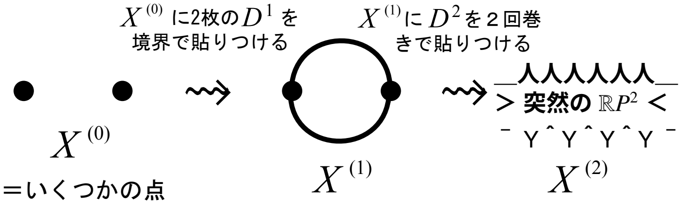
他の CW 複体の例

n **次元球面の作り方は上で分かったと思う。他の空間の例**

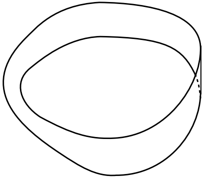


他の CW 複体の例

n 次元球面の作り方は上で分かったと思う。他の空間の例



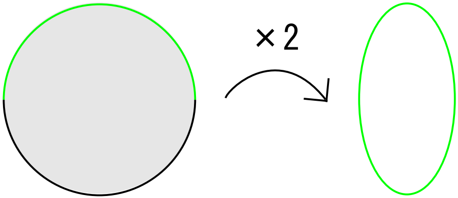
$\mathbb{R}P^2$ の別の作り方



境界部分は S^1
ここに D^2 の境界 S^1 を
そのまま貼りつける

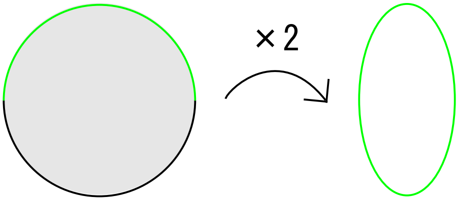
他の CW 複体の例

$\mathbb{R}P^2$ において $f : S^1 \xrightarrow{\mathrm{id}} X^{(1)} \hookrightarrow \mathbb{R}P^2$ という $\pi_1(\mathbb{R}P^2)$ の元は 2 倍すると、貼り付けた D^2 の境界と一致して、定値写像とホモトピック。



他の CW 複体の例

$\mathbb{R}P^2$ において $f : S^1 \xrightarrow{\mathrm{id}} X^{(1)} \hookrightarrow \mathbb{R}P^2$ という $\pi_1(\mathbb{R}P^2)$ の元は 2 倍すると、貼り付けた D^2 の境界と一致して、定値写像とホモトピック。



同様に

$$(D^{n+1} \supset) S^n \xrightarrow{\times m} S^n$$

によって得られる空間 X において、$\pi_n(X)$ の元 $f : S^n \hookrightarrow X$ は m 倍すると D^{n+1} の境界に一致。
$\Longrightarrow \pi_n(X) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ っぽい

$\pi_n(X)$ を調べてみる

特異ホモロジー群は

$$H_*(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} & (* = n) \\ 0 & (* \neq n, 0) \end{cases}$$

定理

単連結な空間 X において、

$$H_*(X) = 0 \ (1 \leq * < n) \Leftrightarrow \pi_*(X) = 0 \ (1 \leq * < n)$$

さらに、そのとき $H_n(X) \cong \pi_n(X)$ が成立。

という Hurewicz **の定理があるので、$\pi_n(X) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ で正しい。**

Moore 空間

定義

G : 可換群, $n \in \mathbb{N}$ として、ホモロジー群が

$$H_*(X) = \begin{cases} G & (* = n) \\ 0 & (* \neq n, 0) \end{cases}$$

という空間は Moore 空間と呼ばれ、$M(G, n)$ と表す。

例

- S^n は $M(\mathbb{Z}, n)$
- 上の空間は $M(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, n)$

一般の Moore 空間の作り方

G の生成元の数だけ S^n を用意する。

一般の Moore 空間の作り方

G の生成元の数だけ S^n を用意する。

以下、

一般の Moore 空間の作り方

G の生成元の数だけ S^n を用意する。

以下、**略**

Eilenberg-MacLane 空間

定義

G : **可換群**, $n \in \mathbb{N}$ **として**

$$\pi_*(K(G,n)) = \begin{cases} G & (* = n) \\ 0 & (* \neq n) \end{cases}$$

という空間を $K(G,n)$ **で表し、**Eilenberg-MacLane **空間という。**

Eilenberg-MacLane 空間

定義

G : 可換群, $n \in \mathbb{N}$ として

$$\pi_*(K(G,n)) = \begin{cases} G & (* = n) \\ 0 & (* \neq n) \end{cases}$$

という空間を $K(G,n)$ で表し、Eilenberg-MacLane 空間という。

Moore 空間 $X = M(G,n)$ について

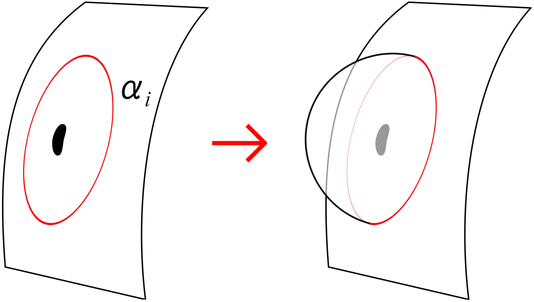
$$\pi_i(X) = \begin{cases} G & (i = n) \\ 0 & (0 \leq i < n) \end{cases}$$

と分かった。しかし、$n+1$ 次以上のホモトピー群は不明。

$n+1$ 次以上のホモトピー群を消す

$\pi_{n+1}(X)$ の生成元 $\alpha_i : S^{n+1} \to X$ をとる。
各々の α_i に沿って D^{n+2} を貼りつける（できた空間を X_{n+1} と書く）。

$$(D^{n+2} \supset) S^{n+1} \xrightarrow{\alpha_i} X$$

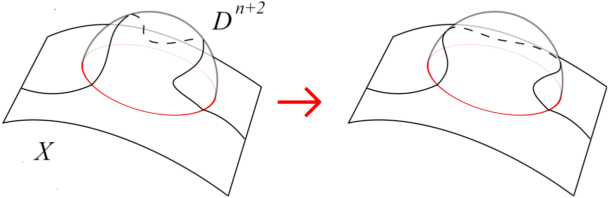


もとの $\pi_{n+1}(X)$ の元は $0 \in \pi_{n+1}(X_{n+1})$ になる。

n 次以下のホモトピー群について

命題

$$\pi_i(X_{n+1}) = \pi_i(X)\ (0 \leq i \leq n)$$



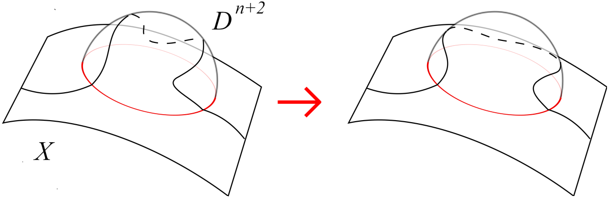
$n+1$ 次まで分かった

$$\pi_i(X) = \begin{cases} 0 & (0 \leq i < n) \\ G & (i = n) \\ 0 & (n < i \leq n+1) \end{cases}$$

n 次以下のホモトピー群について

命題

$$\pi_i(X_{n+1}) = \pi_i(X)\ (0 \le i \le n)$$



$n+1$ 次まで分かった

$$\pi_i(X) = \begin{cases} 0 & (0 \le i < n) \\ G & (i = n) \\ 0 & (n < i \le n+1) \end{cases}$$

この操作を繰り返し（無限回！）行うことで、$K(G,n)$ が構成できる。

CW 近似

上で用いたテクニックを使って、
任意の空間 X に対して、それと同じホモトピー群を持つ CW 複体 X' が作れる（写像 $X' \to X$ 込みで）。これを CW 近似という。

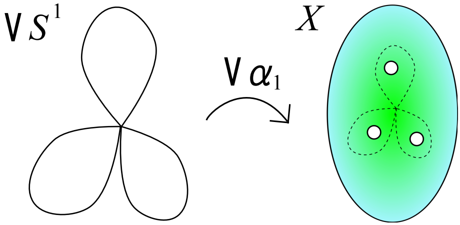
$$\forall X : \textbf{位相空間},\ \exists X' : \text{CW 複体},\ \exists f : X' \to X$$

$$\text{s.t. } f_* : \pi_*(X') \to \pi_*(X)\ \textbf{は同型}$$

まずは $\pi_1(X)$

まず、$\pi_1(X)$ の生成元 $\alpha_1 : S^1 \to X$ に対して $\{S^1\}_{\alpha_1 \in \Lambda_1}$ を用意する。

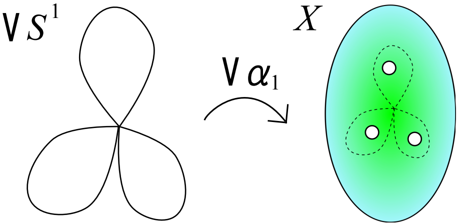
$$\bigvee \alpha_1 : \bigvee_{\alpha_1 \in \Lambda_1} S^1 \longrightarrow X$$



まずは $\pi_1(X)$

まず、$\pi_1(X)$ の生成元 $\alpha_1 : S^1 \to X$ に対して $\{S^1\}_{\alpha_1 \in \Lambda_1}$ を用意する。

$$\bigvee \alpha_1 : \bigvee_{\alpha_1 \in \Lambda_1} S^1 \longrightarrow X$$



$$(\bigvee \alpha_1)_* : \pi_1(\bigvee_{\Lambda_1} S^1) \longrightarrow \pi_1(X)$$

これは全射

まずは $\pi_1(X)$

$\mathrm{Ker}\,(\bigvee \alpha_1)_*\ (\subset \pi_1(\bigvee_{\Lambda_1} S^1))$ **の生成元** $\alpha^{(1)} : S^1 \to \bigvee S^1$ **に** D^2 **を貼りつける。**

$$X^{(1)} := \bigvee_{\Lambda_1} S^1 \cup (\bigsqcup_{\alpha^{(1)}} D^2)$$

まずは $\pi_1(X)$

$\mathrm{Ker}\,(\bigvee \alpha_1)_*\ (\subset \pi_1(\bigvee_{\Lambda_1} S^1))$ **の生成元** $\alpha^{(1)} : S^1 \to \bigvee S^1$ **に** D^2 **を貼りつける。**

$$X^{(1)} := \bigvee_{\Lambda_1} S^1 \cup (\bigsqcup_{\alpha^{(1)}} D^2)$$

$f^{(1)} : X^{(1)} \to X$ **を** $\bigvee \alpha_1$ **で定める（貼りつけた** D^2 **の部分は** $\alpha(S^1) \simeq x_0$ in X **で使っているホモトピーで定める）。**

まずは $\pi_1(X)$

$\mathrm{Ker}\,(\bigvee\alpha_1)_*\ (\subset\pi_1(\bigvee_{\Lambda_1}S^1))$ の生成元 $\alpha^{(1)}: S^1\to\bigvee S^1$ に D^2 を貼りつける。

$$X^{(1)} := \bigvee_{\Lambda_1} S^1 \cup (\bigsqcup_{\alpha^{(1)}} D^2)$$

$f^{(1)}: X^{(1)}\to X$ を $\bigvee\alpha_1$ で定める（貼りつけた D^2 の部分は $\alpha(S^1)\simeq x_0$ in X で使っているホモトピーで定める）。

$$f_*^{(1)}: \pi_1(X^{(1)})\to\pi_1(X)$$

Ker を消したので、これは単射にもなった。

次に $\pi_2(X)$

$\pi_2(X)$ **の生成元** $\alpha_2 : S^2 \to X$ **に対して** $\{S^2\}_{\alpha_2 \in \Lambda_2}$ **を用意する。**

$$\bigvee \alpha_2 : \bigvee_{\alpha_2 \in \Lambda_2} S^2 \longrightarrow X$$

次に $\pi_2(X)$

$\pi_2(X)$ の生成元 $\alpha_2 : S^2 \to X$ に対して $\{S^2\}_{\alpha_2 \in \Lambda_2}$ を用意する。

$$\bigvee \alpha_2 : \bigvee_{\alpha_2 \in \Lambda_2} S^2 \longrightarrow X$$

$$f^{(1)} \vee \bigvee \alpha_2 : X^{(1)} \vee \bigvee_{\Lambda_2} S^2 \longrightarrow X$$

次に $\pi_2(X)$

$\pi_2(X)$ の生成元 $\alpha_2 : S^2 \to X$ に対して $\{S^2\}_{\alpha_2 \in \Lambda_2}$ を用意する。

$$\bigvee \alpha_2 : \bigvee_{\alpha_2 \in \Lambda_2} S^2 \longrightarrow X$$

$$f^{(1)} \vee \bigvee \alpha_2 : X^{(1)} \vee \bigvee_{\Lambda_2} S^2 \longrightarrow X$$

$$(f^{(1)} \vee \bigvee \alpha_2)_* : \pi_2(X^{(1)} \vee \bigvee_{\Lambda_2} S^2) \longrightarrow \pi_2(X)$$

これは全射（しかも、S^2 をつけても π_1 は変わらない）

次に $\pi_2(X)$

$\mathrm{Ker}\,(f^{(1)} \vee \bigvee \alpha_2)_*(\subset \pi_2(X^{(1)} \vee \bigvee_{\Lambda_2} S^2))$ **の生成元**
$\alpha^{(2)} : S^2 \to \bigvee X^{(1)} \vee \bigvee_{\Lambda_2} S^2$ **に** D^3 **を貼りつける（**π_1 **は変わらない）。**

$$X^{(2)} := X^{(1)} \vee \bigvee_{\alpha \in \Lambda_2} S^2 \cup (\bigsqcup_{\alpha^{(2)}} D^3)$$

次に $\pi_2(X)$

$\mathrm{Ker}\,(f^{(1)} \vee \bigvee \alpha_2)_*(\subset \pi_2(X^{(1)} \vee \bigvee_{\Lambda_2} S^2))$ の生成元
$\alpha^{(2)} : S^2 \to \bigvee X^{(1)} \vee \bigvee_{\Lambda_2} S^2$ に D^3 を貼りつける（π_1 は変わらない）。

$$X^{(2)} := X^{(1)} \vee \bigvee_{\alpha \in \Lambda_2} S^2 \cup (\bigsqcup_{\alpha^{(2)}} D^3)$$

$f^{(2)} : X^{(2)} \to X$ を $f^{(1)} \vee \bigvee \alpha_2$ で定める（貼りつけた D^3 の部分は
$\alpha_2(S^2) \simeq x_0$ in X で使っているホモトピーで定める）。

次に $\pi_2(X)$

$\mathrm{Ker}\ (f^{(1)} \vee \bigvee \alpha_2)_*(\subset \pi_2(X^{(1)} \vee \bigvee_{\Lambda_2} S^2))$ の生成元
$\alpha^{(2)} : S^2 \to \bigvee X^{(1)} \vee \bigvee_{\Lambda_2} S^2$ に D^3 を貼りつける（π_1 は変わらない）。

$$X^{(2)} := X^{(1)} \vee \bigvee_{\alpha \in \Lambda_2} S^2 \cup (\bigsqcup_{\alpha^{(2)}} D^3)$$

$f^{(2)} : X^{(2)} \to X$ を $f^{(1)} \vee \bigvee \alpha_2$ で定める（貼りつけた D^3 の部分は
$\alpha_2(S^2) \simeq x_0$ in X で使っているホモトピーで定める）。

$$f_*^{(2)} : \pi_2(X^{(2)}) \to \pi_2(X)$$

Ker を消したので、これは単射にもなった。

これを繰り返して、$f^{(\infty)} : X^{(\infty)} \to X$ ができて、$f_*^{(\infty)} : \pi_*(X^{(\infty)}) \to \pi_*(X)$ は
同型写像。

$K(G,n)$ の　すごい　性質

$K(G,n)$ の　すごい　性質

定理

$$[X, K(G,n)]_* \cong \tilde{H}^n(X;G)$$

$K(G,n)$ の　すごい　性質

定理

$$[X, K(G,n)]_* \cong \tilde{H}^n(X;G)$$

定理

$n \geq 2$ として $[K(G'',n), K(G,n+1)]_*$ は
可換群の拡大 $G \to G' \to G''$ の同値類と 1 対 1 対応する

$K(G,n)$ の　すごい　性質

定理

$$[X, K(G,n)]_* \cong \tilde{H}^n(X;G)$$

定理

$n \geq 2$ として $[K(G'',n), K(G,n+1)]_*$ は
可換群の拡大 $G \to G' \to G''$ の同値類と 1 対 1 対応する

命題

$K(G,n)$ は無限ループ空間

$$\Omega K(G,n+1) \simeq K(G,n)$$

$K(G,n)$ の　すごい　性質

$K(G,n)$ の　すごい　性質

定理

$$[X, K(G,n)]_* \cong \tilde{H}^n(X; G)$$

$K(G,n)$ の　すごい　性質

定理

$$[X, K(G,n)]_* \cong \tilde{H}^n(X;G)$$

定理

$n \geq 2$ **として** $[K(G'',n), K(G,n+1)]_*$**は**
可換群の拡大 $G \to G' \to G''$**の同値類と 1 対 1 対応する**

$K(G,n)$ の　すごい　性質

定理

$$[X, K(G,n)]_* \cong \tilde{H}^n(X;G)$$

定理

$n \geq 2$ として $[K(G'',n), K(G,n+1)]_*$ は
可換群の拡大 $G \to G' \to G''$ の同値類と 1 対 1 対応する

命題

$K(G,n)$ は無限ループ空間

$$\Omega K(G,n+1) \simeq K(G,n)$$

$K(G,n)$ の　すごい　性質

$K(G,n)$ の　すごい　性質

定理

$$[X, K(G,n)]_* \cong \tilde{H}^n(X;G)$$

$K(G,n)$ の　すごい　性質

定理

$$[X, K(G,n)]_* \cong \tilde{H}^n(X;G)$$

定理

$n \geq 2$ として $[K(G'',n), K(G,n+1)]_*$ は
可換群の拡大 $G \to G' \to G''$ の同値類と 1 対 1 対応する

$K(G,n)$ の　すごい　性質

定理

$$[X, K(G,n)]_* \cong \tilde{H}^n(X; G)$$

定理

$n \geq 2$ **として** $[K(G'',n), K(G,n+1)]_*$**は**
可換群の拡大 $G \to G' \to G''$**の同値類と 1 対 1 対応する**

命題

$K(G,n)$ **は無限ループ空間**

$$\Omega K(G,n+1) \simeq K(G,n)$$

無限ループって怖くね？

無限ループって怖くね？

ご清聴ありがとうございました。