

発表一覧

※下記の内容は発表者の提出資料を元に運営が編集したものです。発表の詳しい内容は発表者提出のアブストラクトを御覧ください。

【発表者】小泉ふゅーりー(koizumi_fifty)

【タイトル】特異コホモロジー論の概説と多様体論への応用

【分野】幾何(代数的トポロジー)

【レベル】学部3年程度

【必要とする知識】位相空間と多様体の基礎的な知識、加群などの基礎的な代数構造の定義

【発表者】のうこ(noukoknows)

【タイトル】「論理学の哲学」への短いイントロダクション

【分野】哲学(論理学の哲学)

【レベル】全学年対象

【必要とする知識】特になし

【発表者】ぴあのん(piano2683)

【タイトル】モデル理論入門

【分野】基礎論(モデル理論)

【レベル】中級(必要とする知識を参照)

【必要とする知識】数理論理学の基本的事項(一階述語論理の完全性・コンパクト性定理程度)

【発表者】うだ(t_uda)

【タイトル】現代の数学と数値解析

【分野】解析(数値計算・関数解析)

【レベル】高校生から学部程度(必要とする知識を参照)

【必要とする知識】高校数学のベクトル・微分積分の基礎知識(数列の極限や複素平面などの理解があるとなお良い)

また、発展的な内容として関数解析の紹介もするので、線型代数・微分積分学の基本的な知識があることが望ましい。

【発表者】ft_math

【タイトル】圏論超入門～圏とは何か～

【分野】代数(圏論)

【レベル】学部2～3年程度

【必要とする知識】特に仮定しない(ベクトル空間やアーベル群、位相空間などに慣れているとよりよい)

【発表者】証蔵(Prooftheorist)

【タイトル】Peano 算術の形式的体系 PA の無矛盾性証明

【分野】基礎論(証明論)

【レベル】中級(必要とする知識を参照)

【必要とする知識】論理学の初歩, シークエント計算LK

【発表者】ぺけ(peke_math2)

【タイトル】 $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$

【分野】代数(超越数論)

【レベル】学部 1 回生程度

【必要とする知識】微分法, Riemann 積分, 特に, 重積分, 広義積分, 積分と極限・無限和・微分の交換可能性を知っているとよりよい

【発表者】もりた(kouheimorita)

【タイトル】つどいへのお手紙

【分野】哲学(科学哲学)

【レベル】全学年対象

【必要とする知識】特になし

【発表者】ことりん

【タイトル】

【分野】解析(偏微分方程式)

【レベル】解析学を専攻とする4回生以上

【必要とする知識】 L^p 空間、Holder の不等式、Sobolev 空間、フーリエ変換(多項式と微分の関係)、Minkowski の積分不等式くらいは説明なしで使うかもしれません。

【発表者】__sappy__

【タイトル】ホモトピー群,CW 近似,Eilenberg-MacLane 空間

【分野】幾何(代数的トポロジー)

【レベル】学部 3~4 年程度

【必要とする知識】ホモトピーの定義, 群などの基本的な代数の知識
特に同値関係で割った商集合の扱いに慣れているとよい。

【発表者】アルゴドゥー(alg_d)

【タイトル】選択公理をいかにして使ってしまうか

【分野】選択公理

【レベル】学部 2~3 年生程度

【必要とする知識】選択公理の主張・整列順序の性質・濃度の大小の定義・群の定義・素朴な集合論の知識全般

【発表者】さざんか(sir_zankel)【タイトル】 L_p 空間の基底について

【分野】解析(関数解析)

【レベル】学部 3~4 年程度

【必要とする知識】学部三回生までの数学, 特に微分積分学と線形代数, 簡単なフーリエ解析の理論

【発表者】えんど(end313124)

【タイトル】秘書採用問題

【分野】応用数学(確率・統計, ゲーム理論)

【レベル】高校程度

【必要とする知識】高校数学

【発表者】usb(usb_usb)

【タイトル】無限ラムゼイの定理について

【分野】基礎論(集合論)

【レベル】中級(必要とする知識を参照)

【必要とする知識】基本的な集合の知識(集合の濃度、可算無限、非可算無限等)
さらに順序集合などの抽象的代数構造に慣れているとよりよい

【発表者】平泉(hrizm_math)

【タイトル】 p 進数入門

【分野】代数(整数論)

【レベル】学部 2~3 年程度

【必要とする知識】特になし、ただし環や体とそれらの簡単な例や位相空間や距離について知っているよりよい

【発表者】えの(@eno____zzz)

【タイトル】デリバティブの価格決定理論と確率解析

【分野】解析・応用数学(関数解析・数理ファイナンス)

【レベル】学部 2~3 年生程度

【必要とする知識】微積分学

発表者自己紹介

凡例

@Twitter アカウント

【1】HN

【2】プロフィール

【3】数学を好きになったきっかけ

【4】好きな数学の理論や分野, 偉人

【5】一言

@koizumi_fifty

【1】小泉ふゆーりー

【2】博士志望の修士二回生です。

【3】学部三回生のころ難問に挑む楽しみを知り、そのままずるずるとここまできました。

【4】好きな分野は代数トポロジー。好きな偉人は、強いて挙げるならユリウス・カエサルでしょうか。

【5】私は基本的に代数トポロジー布教のために参加しますので、興味のある方はぜひ色々お話ししましょう。

@noukoknows

【1】のうこ(”脳子”とも)

【2】分析哲学(その中でもとりわけ論理学まわりの哲学)に恋する医学部4回生

【3】直接のきっかけは、嘉田勝「論理と集合から始める数学の基礎」。間接的なきっかけはたぶん飯田隆「言語哲学大全 II」あたりとか

【4】好きな数学の分野: ロジック / 好きな数学者: ゴットロープ・フレーゲ

【5】皆さん数学や論理学わたしに教えてください(切実)

@piano2683

【1】ぴあのん (@piano2638)

【2】京都大学理学部二回生・数学系志望

【3】もともとそろばんをやっていて数字にはある程度強かったのですが、いろんなきっかけが重なって今に至ります。

【4】ロジックの数学への応用に興味があります。当面は Hrushovski さんの幾何的モデル理論に関する仕事を理解することを目指しています。

【5】皆さんと音楽のお話もしたいなあ、とか思ったり。

@t_uda

【1】うださん(or 自然数の人)

【2】RIMS で数値計算を専攻しています。

【3】小学生の頃から算数が得意で、気付いた時には数学が好きでした。

【4】計算機科学や圏論などの、「分野を横断する分野」が好きです。好きな偉人はフォン・ノイマンです。

【5】#0 は自然数

@ft_math

【1】ft_math (特に名前はないのでエフティーとかでいいです)

【2】東京工業大学理学部数学科 2 年

【3】数学という言葉の指す所は広いですが、だいたいは昔から好きでした。

【4】まだまだ勉強中の身なので大層な事は言えませんが、僕の中では基本的に数学は幾何です。

【5】出来る限り分かりやすく伝えられるように頑張ります！

@Prooftheorist

【1】証蔵

【2】社会人(環境分析機関に勤務。営業・企画、調査・研究・論文執筆等の仕事)

【3】学部時代に哲学の講義を履修していた際に論理学の存在を知ってその形式美(←殿下のマネではないですが…)に惹かれ、独学を始めた。今の会社に入社してしばらくは実務的な分野(経営戦略やマーケティング、環境分析等)の勉強が主だったが、Twitter のすうがく徒の皆さんの数学に対する熱意に感化され、(Twitter を始めた)昨年 11 月から再び論理学や数学にのめり込みだした。

【4】好きな分野は数学基礎論(特に証明論)。数学への応用について興味がある。

【5】イクメン一年生。子どもの成長とともに僕自身も成長していきたいなあ、と思っている。

@peke_math2

【1】ペケ

【2】慶應大学の数論幾何専攻, M2

【3】数学は子どもの頃から好きだったが、のめり込むようになったのは Fermat 予想に関する読み物(サイモン・シンなど)を読んだことがきっかけ。

【4】好きな分野や理論: 整数論, 特に p 進 Galois 表現論や超越数論 好きな数学者: 加藤和也先生

【5】関東者ですがどうぞよろしく。

@kouheimorita

【1】もりた

【2】科哲の総本山

【3】たまに美人なところを垣間見れるから？

【4】ピタゴラス

【5】お手柔らかに願います

@hrizm_math

【1】平泉

【2】理工学部数学科 4 年

【3】いつの間にか好きになっていました。

【4】数論、数理論理学に興味があります。

【5】ゆるい発表にしたいです。

@kotorin_z

【1】ことりん

【2】怪鳥(つどい参加時は人に化ける)

【3】先生に洗脳された

【4】偏微分方程式を勉強してます

【5】よろぴよ～

@_sappy_

【1】_sappy_

【2】(代)数(トポロジー)学徒の D1

【3】昔から好きだったというのはある。大学数学という意味では河野先生の「集合と位相」のノートの影響。

【4】圏論的なことは割と好き。Quillen 先生のおかげで位相空間以外にもホモトピー論ができるので、足を向けて寝られない。

【5】このアンケートをどれくらい遊んで書けば良いか分からないので、私を詳しく知りたい方は twitter (

@_sappy_) を見てください。

@alg_d

- 【1】アルゴドゥー
- 【2】選択公理厨。プロのトゥギャッターをやっています。
- 【3】ないよ
- 【4】類体論
- 【5】Banach-Tarski の定理って、直感に反していますか？

@sir_zankel

- 【1】さざんか
- 【2】数学徒見習い
- 【3】自分なりの具体例のいじり方をみつけたこと
- 【4】Jean Bourgain
- 【5】よろしくです！

@end313124

- 【1】end/えんど/えんどう
- 【2】びぶんせきぶん学部 文理の境界
- 【3】昔から嫌いじゃなかったですが気がついにはまり込んでました。
- 【4】まんべんなく好きですが解析、代数あたりが楽しげ
- 【5】なるだけ面白可笑しくなるよう頑張ります。

@usb_usb

- 【1】usb
- 【2】東海地方某所で集合論の研究をやっています。
- 【3】集合論の勉強を始めたきっかけは赤摂也の「集合論入門」を読んだせいですが、数学全般のきっかけは覚えてません。
- 【4】あたりまえですけど自分の研究分野。あと巨大基数。
- 【5】怪しくないよ。

@eno_zzz

- 【1】えの(@eno__zzz ,アンダーバー 4 つ)
- 【2】京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻 M2
- 【3】気がついたらこうなっていた。
- 【4】作用素環論, 表現論, 確率論. 抽象論より具体例をゴリゴリと触るほうが好き.
- 【5】来年からは社会人です. 研究のことや就職のことでもいろいろ聞いてください.

特異コホモロジー論の概説と多様体論への応用

@koizumi_fifty

2012年9月8日

特異コホモロジーは代数トポロジー的な道具の中でもっとも広く用いられ、また計算が比較的容易なものでもあります。今回の発表は位相空間論や多様体論の初歩を習得したばかりの——具体的に言うならば三回生くらいの——方々に向けて、特異コホモロジーを代表とする代数トポロジー的手法に興味をもっていただくことを主目的として行うものです。

任意の位相空間 X と積の単位元 1 をもつ可換環 R に対し、然るべきやり方で R 加群 $H^*(X; R)$ が構成されます。これを X の R 係数**特異コホモロジー**といいます。「然るべきやり方」についてはこの発表では踏み込みませんので、興味のある方は最下部の参考文献 [1] などをご覧ください。この $H^*(X; R)$ は次数付きの R 代数となります。すなわち、 $H^*(X; R)$ には単位元をもつ環構造が入っており、さらに $H^*(X; R)$ は部分加群 $H^0(X; R), H^1(X; R), H^2(X; R), \dots$ により $H^*(X; R) = \bigoplus_{n=0,1,2,\dots} H^n(X; R)$ と分解され、 $H^i(X; R)$ の元と $H^j(X; R)$ の元の積は $H^{i+j}(X; R)$ の元となります。この $H^n(X; R)$ を X の n 次**特異コホモロジー**といいます。次数付き代数の概念は一見飲み込みづらいかもしれませんが、多項式環のようなものと思えば分かりやすいかと思います。

大雑把に言うと、特異コホモロジーは何よりもまずふたつの位相空間が同相であるか否かを判定するために用いられます。連続写像 $f: X \rightarrow Y$ があったとき、これはコホモロジーに次数付き R 代数としての準同型を導きます。これを $f^*: H^*(Y; R) \rightarrow H^*(X; R)$ と記します。コホモロジーをとる前と後で矢印の向きが逆転していることに注意してください。

重要なのは、恒等写像 $id: X \rightarrow X$ がコホモロジーに導く写像 id^* は $id: H^*(X; R) \rightarrow H^*(X; R)$ に等しいということです。これにより X と Y が同相であれば $H^*(X; R)$ と $H^*(Y; R)$ は次数付き R 代数として同型であることが分かります。従って、コホモロジーが同型でないふたつの空間は同相ではありえません。たとえば n 次元球面 S^n については

$$H^i(S^n; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (i = 0, n) \\ 0 & (i \neq 0, n) \end{cases}$$

となるので次元の異なる球面は同相でないことが分かります。また n 次元複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ については

$$H^i(\mathbb{CP}^n; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (i = 0, 2, 4, \dots, 2n) \\ 0 & (i \neq 0, 2, 4, \dots, 2n) \end{cases}$$

となり、従って $S^2 \cong \mathbb{CP}^1$ の場合を除いて、球面と複素射影空間は同相でないことが分かります。

発表本番では以上のような概説に加えて、他にもいくつかの多様体 (特に Lie 群) のコホモロジーの例を挙げ、最後に現在私が研究している (というところが大仰ですが) Cohomological rigidity problem についても少し述べるつもりです。

参考文献

- [1] 中岡稔:位相幾何学—ホモロジー論 (共立出版)
- [2] 服部晶夫:位相幾何学 (岩波基礎数学選書, 岩波書店)
- [3] 戸田宏, 三村護:リー群の位相 上—線形代数から KO-群の周期性へ (紀伊國屋数学叢書, 紀伊国屋書店)

「数学の哲学」への短いイントロダクション

のうこ (@noukoknows)

今回の「つどい」では、20世紀の頭ごろに起こった＜数学の基礎付け運動＞あたりの話をさせていただこうと考えております。

「数学の哲学」といっても、今回できるのはあくまで古典的なお話で、現代的なことは殆どお話しすることができないと思います(主に私の能力的に)。現代的な話は参考文献[6]に載っておりますので、興味のある方はぜひそちらをご参照ください。

参考文献[b]は、奈良女子大学でロジックを専門に研究されておられる鴨浩靖 (@kamo_hiroyasu) 先生の web サイト(の一部)です。書評や「よくある間違い」リストがあり、参考にさせていただいております。

また、参考文献[c]は、直観主義についての頓珍漢な理解を twitter 上で晒した私に対して、(数理論理学や、論理学の哲学の) 専門家のかたがたが優しくツッコミを入れてくださったときのまとめです(ちなみにまとめてくださったのはプロトギッターで今回のつどいにも参加されている某@alg.d さんです)。自らの無知の記録を「参考文献」として晒すのはいささか気恥ずかしいのですが、過去の私と同じような誤解に陥っておられる方のお役に立てばと、ここにあげておくことにいたします。

最後に、参考文献[6]の p.22 より、個人的にお気に入りの箇所を引用しておきます：

(・・・) 現在のわれわれはまだ、フレーゲの作った述語論理の言語を、論理学の標準的言語として用いている。だが、それ以外の言語が研究されていないわけではない。古典一階述語論理だけが論理であると考えられた時期には、論理について知られるべきことはすべて知られたと思われたこともあった。しかし、古典一階述語論理だけが論理であるとする論理学者はいまではほとんどいないだろうし、そう考える哲学者も減りつつある。「標準的」論理は、一方で、その範囲に収まらない推論をあつかうためにさまざまな仕方で拡張されてきたし、また他方で、それに代わる新たな論理の登場によって、その地位をおびやかされてきてもいる。こうしたことすべてにおいて、テクニカルな議論と哲学的議論の両方が大きな役割を果たしている。考えてみればこれは当然のことである。論理学ほどこの両者が密接に結びついている学問は他にないからである。

■参考文献:

- [1] スチュワート・シャピロ『数学を哲学する』筑摩書房 2012.
- [2] 結城浩『数学ガール ゲーデルの不完全性定理』ソフトバンククリエイティブ 2009.
- [3] 飯田隆(編)『哲学の歴史11 論理・数学・言語』中央公論新社 2007.
- [4] 林晋、八杉真理子(訳・解説)『不完全性定理』岩波文庫(岩波書店 2006).
- [5] 金子洋之『ダメットにたどりつくまで 反実在論とは何か』勁草書房 2006.
- [6] 飯田隆(編)『論理の哲学』講談社選書メチエ(講談社 2005).
- [7] 田中一之『数学のロジックと集合論』培風館 2003.
- [8] 金子洋之『記号論理入門』産業図書 1994.
- [9] 小野寛晰『情報科学における論理』日本評論社 1994.
- [10] 彌永昌吉、彌永健一『集合と位相』岩波書店 1990.
- [11] Raymond M. Smullyan et al., SET THEORY AND THE CONTINUUM PROBLEM, Dover, 2010.
- [12] Alexander George and Daniel J. Velleman, PHILOSOPHIES OF MATHEMATICS, Blackwell, 2002.
- [a] “STANFORD ENCYCLOPEDIA OF PHILOSOPHY” <<http://plato.stanford.edu/>>.
- [b] “書評(数理論理学)” <<http://taurus.ics.nara-wu.ac.jp/staff/kamo/shohyo/logic.html>>.
- [c] “直観主義, 背理法と否定の導入 - Togetter” <<http://togetter.com/li/292418>>.

モデル理論入門

ぴあのん @piano2683

2012 年 9 月 8 日

モデル理論は数理論理学の発展に伴って生まれた比較的新しい分野です。20 世紀の中頃に分野として確立して以来、目覚ましい進展を遂げてきました。今回の発表では、モデル理論の基本的な考え方を知っていただきたいと思います。

といっても、ロジックに慣れていない方は「モデル」と言われてもあまりピンとこないかと思います。「モデル」とは、簡単に言えば「公理系を満たすような構造をもつ集合」のことです。例えば、以下のような公理系を考えてみましょう。

$$\begin{aligned}\forall x \forall y \forall z ((x \cdot y) \cdot z &= x \cdot (y \cdot z)) \\ \forall x (e \cdot x &= x \cdot e = x) \\ \forall x \exists y (x \cdot y &= y \cdot x = e)\end{aligned}$$

これらの公理を満たすような構造を持つ集合は、ご承知の通り、群と呼ばれています。数理論理学の言葉では集合 G が公理を満たすという代わりに、「 G は公理系のモデルである」という表現をします。そして、モデル理論においては「公理系のモデルにはどのようなものが存在するか？」という一般的課題を中心に据えて研究が進められています。

今回の発表では、数理論理学の基本的な知識（一階述語論理の完全性、コンパクト性定理程度）を前提としてモデル理論の初歩を解説します。特に今回はモデルの存在に関する初等的な結果である Löwenheim-Skolem の定理を目標に話を進めていきます。Löwenheim-Skolem の定理はモデルの濃度に関する定理です。先ほどの群の例のように、具体的な構造から抽象的な性質を抜き出すことで数学の本質を見極めた議論がしやすくなります。しかしその一方で、無限群や無限次元線型空間などのやや面倒な構造も出てきてしまいます。このような現象が一般に成立するという主張が Löwenheim-Skolem の定理です。この定理によれば、濃度の概念を一階述語論理式で記述することが不可能であることも分かります。

また、時間が許せばもう少し進んだモデル理論の話題（Skolem's paradox, Morley's categoricity theorem など）についてもお話しようかと思います。

参考文献

- [1] 新井敏康 『数学基礎論』 岩波書店 2011.
- [2] 田中一之（編） 『ゲーデルと 20 世紀の論理学 第 2 巻 完全性定理とモデル理論』 東京大学出版会 2006.
- [3] 坪井明人 『モデルの理論』（数学基礎論シリーズ 3） 河合文化教育研究所/河合出版 1997.
- [4] C. C. Chang and H. J. Keisler, Model Theory (third edition), Dover reprint, 2012.
- [5] D. Marker, Model Theory: An Introduction, Graduate Texts in Mathematics 217, Springer, 2002.

関西すうがく徒のつどい

「現代の数学と数値解析」

Tomoki UDA (@t_uda)

2012-09-08

概要

この講義では、問題解決のための道具としての「現代の数学」を、数値解析という分野を通して紹介していくことを目的とする。テーマとしては「Newton 法」を取り上げる。実 1 変数の場合の Newton 法は、幾何的・直感的に理解し易く、グラフさえ描ければ中学生でもすぐ理解できる単純なアルゴリズムである。

講義では、まず実 1 変数の場合の Newton 法の数値計算例をいくつか紹介しその性質を理解したのちに、複素平面における Newton 法、一般のノルム空間における Newton 法と、より一般化・抽象化したアルゴリズムについて学ぶ。

大切な標語 「例示は理解の試金石」、「抽象化は数学最大の武器」

キーワード 数値計算、Newton(-Raphson) 法、2 次収束、ノルム空間、フレシェ微分、Newton 型作用素

記号の定義 実数全体 $\mathbf{R}$ 、複素数全体 $\mathbf{C}$ 、一般のノルム空間 X 、ノルム $\|\cdot\|$

実 1 変数関数の微分 $x \rightarrow x_0$ の時 $f(x) = f(x_0) + a \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|)$ ならば $f'(x_0) = a$

複素 1 変数関数の微分 $z \rightarrow z_0$ の時 $F(z) = F(z_0) + A(z - z_0) + o(|z - z_0|)$ ならば $F'(z_0) = A$

一般のフレシェ微分 $u \rightarrow u_0$ の時 $\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(u_0) + \mathcal{A}(u - u_0) + o(\|u - u_0\|)$ ならば $\mathcal{F}'[u_0] = \mathcal{A}$

実 1 変数の場合の Newton 法 $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$

複素 1 変数の場合の Newton 法 $z_{n+1} = z_n - F'(z_n)^{-1}(F(z_n))$

一般のノルム空間での Newton 法 $u_{n+1} = u_n - \mathcal{F}'[u_n]^{-1}(\mathcal{F}(u_n))$

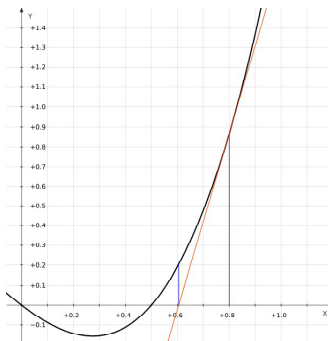


図 1 Newton 法 (実 1 変数)

圏論超入門～圏とは何か～

関西すうがく徒の集い1日目 2012/9/8

1 アブストラクト

圏 (Category) というのは元々は 1940 年頃の位相幾何学で発見されたもので、その後高度に発展し抽象化され、現在では集合論をある種双璧をなすような「もう一つの数学の観点」と言っても過言でないものになっています。その観点は実に特異！なんと「対象 (Object)」「射 (Morphism/Arrow)」と呼ばれるものの関係で数学を記述しようというのです。しかしそれはそれは苦難の道。例えば「集合を一つ取ってきてその中の要素を一つ選ぶ」なんて簡単な作業も圏論的には「要素なんて概念はないぞー！」と困ってしまう訳です。ところがしかし、この一見ただの遠回りにも見える概念が実は数学の「双対性 (Duality)」を見るにはもってこいなのです。例えば、「最小公倍数と最大公約数」「全射と単射」などは「うーん、なんか対称の概念っぽいのは分かるけど、何が対称かって言われたら困るなあ」と思っている人も少なくないはず。そういった概念は圏論の「図式」を使えば双対性が一目瞭然となります。今回のセミナーはそういった一風変わった圏論的な概念を出来る限り分かりやすい例のみを用いて紹介しようと思います。

2 予備知識について

予備知識は基本的に仮定しません。「ええ、そんなの大丈夫なのー？」と思うかもしれませんがここで扱うのは圏論の基礎の基礎。例えば集合論でも、特に構造の入っていない集合自体は別に扱うのは難しくない(基礎論の話になるとそれはそれで難しいですが)。でもそこに群構造やら位相やら色々な構造を付加する事によって「ムズカシイスウガク」になる訳です。アブストラクトにも書いた通りこのセミナーの目的は「圏という一風変わった概念の紹介」なので、難しい代数的構造は特に入れるつもりはありません。あえていうならば、ベクトル空間やアーベル群や位相空間といった基本的な空間について、雰囲気だけでも知っていたらより多くの具体例を得られてより楽しめると思います。

3 参考文献

有名なのは

1. MacLane, Categories for the Working Mathematician
2. Awodey, Category theory

といった所。1 は内容が多くて初学者向きではないです。2 は読みやすいですが内容は少ないです。

2012 年 9 月 8 日

Peano 算術の形式的体系 PA の無矛盾性証明

証蔵 (@Prooftheorist)

本講演では, 証明論の立場からの PA の無矛盾性証明について解説する. 予備知識として, 古典述語論理の式計算 LK の定義や基本定理 (=cut 除去定理), および自然数論に関する初歩的な知識を仮定したい.

“無矛盾性証明”と聞いて思い浮かぶひとつのアイデアとして, LK の場合と同様の方法, つまり矛盾を表す空式 $\perp$ を終式とする証明図に対し (基本定理を適用して) cut free なものを考える, というものがある. cut free な証明図では subformula property (=証明図中の任意の formula は, 終式のある formula の subformula になっている, という性質) が成り立つことから, ごく簡単な検証によって $\perp$ の証明図が存在し得ないことがわかり, 当該体系の無矛盾性が帰結する, というわけだ.

PA の場合にも, この方法でうまくいくのか? 結論からいえば, そのままの形では LK の場合のようにはいかない. その理由は, PA では基本定理が“制限された形”でしか成り立たないためだ. この制限は, 無矛盾性証明を進める上で“障害”となって現れてくる. しかし, 証明図の有限回の適切な変形を併せて行うことでその障害が取り除かれ, 無矛盾性が帰結することになる.

ここで解説する無矛盾性証明の流れは「初めに PA の $\perp$ に至る証明図に対し (PA の) 基本定理を適用する」という点で参考文献[1]や[2]で紹介されている証明とは若干道のりが違ったものになっている. 換言すれば, あくまでも“基本定理の応用”という観点を前面に押し出した証明になっている. この点が見所といえるかもしれない.

LK 以外の (式計算の) 形式的体系で成り立つ基本定理の性質やその応用としての無矛盾性証明に関心のある聴講者の方々にとって, 何がしかの参考になる内容としたい.

参考文献

- [1] 松本和夫『復刊 数理論理学』, 共立出版, 2001
- [2] 竹内外史・八杉満利子『証明論入門』, 共立出版, 1988
- [3] 竹内外史『証明論と計算量』, 裳書房, 1995
- [4] 河田敬義『自然数論』, 森北出版, 2005

$$\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$$

小野雅隆 (慶應義塾大学院理工学研究科修士 2 年)

本講演では $\zeta(3)$ が無理数であることを証明する. 実数は有理数と無理数の二種類の数からなるが, どちらか分かってない実数が数多く存在することが知られている. 特に Riemann の ζ 関数の奇数での値は無理数であると広く信じられているが, $\zeta(3)$ 以外はまだよくわかってないのが現状である. $\zeta(3)$ については, フランスの数学者ロジェ・アペリー (Roger Apéry) が 1978 年に初めて証明を与えている. 今回の講演ではこの $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$ という定理を, 後に与えられたボイカーズ (Frits Beukers) の方法で証明する. (実を言うと, はじめはアペリーの方法を紹介しようと思っていましたが, アペリーの方法は初等的ゆえに複雑で, 講演者も聴講者も辛いものになると思ったのでやめました.) また, 偶数での特殊値や 5 以上の奇数での特殊値について知られていることや, 無理数かどうか分からない実数についても紹介する.

予備知識として微分法および Riemann 積分の理論を仮定する. 特に, 重積分, 広義積分, 積分と極限・無限和・微分の交換可能性は知っていると理解の助けになると思う. それ以外の事実についてはその都度講演者が説明する.

REFERENCES

- [Ap] R. Apéry, Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$, *Astérisque* **61** (1979), pp. 11-13.
- [Be] F. Beukers, A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$, *Bull. London Math. Soc.* **11** (3) (1979), pp. 268-272.
- [Ha] D. Hanson, On the product of the primes, *Canad. Math. Bull.* Vol. **15** (1) (1972), pp. 33-38.
- [Ri] T. Rivoal, La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **331** (2000), no. 4, 267-270.
- [Zu] W. V. Zudilin, One of the numbers $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ is irrational, *Uspekhi Mat. Nauk* [Russian Math. Surveys] **56** (2001), no. 4, 149-150.

つどいへのお手紙

森田 紘平

2012/9/9

拝啓

秋晴の候、すうがくとの皆様にはいつそご活躍とご壮健のこととお慶び申し上げます。わたくし風情の拙速な話に、お耳を傾ける皆様の寛容なお心遣いには深く感謝いたします。みなさまが数学という専門分野に属している一方で、私はといえば、哲学者とかいう仙人やら廃人やらとも区別のつかぬ、甚だ評判の悪い身分の出自であります。単なる哲学者にとどまらず、ただでさえ評判の悪い哲学者の中でも、さらに得体のしれぬ「科学哲学者」とかいう一派であることは否定できません。なんと深い業でしょうか。

しかし、今回は奇特定の主催者様のおかげで、私のような日陰者にも発言の機会が与えられました。少しでも「文系ってどんなかんじなの」とか「哲学ってなんだよ」と言った気持ちをもっていらっしゃるならば、私の些細なお話にお付き合いいただければ幸いです。

前回の「つどい」の発表は拝見させていただきました。まさしく、数学好きの集まりなんだと非常に得心いたしました。私の凡庸な頭脳では理解できませんでしたが、方法論が異なっていることだけは把握できました。郷に入れば郷に従えとは申しますものの数学のやり方で哲学することはできません。また、私の専門領域と皆様の関心は異なるのでしょう。すると私は悩みます。

哲学者の端くれとして何を、どのように話せばよいのか

皆様の中には哲学が嫌いな人もいることでしょう。しかし、その哲学って哲学者の言う哲学と一致するのでしょうか。実際のところ哲学が何をしているのか、実はイメージが湧いていない人もいないのでしょうか。そこで、「哲学ってこんな感じ」「哲学業界ってこんな感じ」というのをお伝えするのが、私の役割ではないのでしょうか。というのも、一般の人に限らず哲学者の間でさえ「何が哲学か」ということは決まっていないからなのです。

皆様は嫌いな数学があるのでしょうか。苦手ではなく嫌い。問い方を変えてみます。数学と呼ばれ、大学にもその専門家が「数学者」として認知されポストもあり、それなりの数の研究者を要する領域が、「これは数学ではない」と言いたくなることがあるのでしょうか。哲学にはそういう分野があります。なんとも不思議な学問です。

得体の知れない哲学を皆様に紹介し、哲学という麻薬の秘密を垣間見て、哲学の食わず嫌いを解消して、正しく嫌いになったり好きになったりしていただきたいと思います。

夏バテなど十分にお気を付け下さい。

敬具

ある 2 次の非線形項をもつ空間 2 次元 Schrödinger 方程式の 散乱状態の非存在について

小鳥遊悠斗

概要

本講演では Schrödinger 方程式の散乱問題に関する下村先生、堤先生の [1] の結果について紹介する。
次の非線型 Schrödinger 方程式に関して考える。

$$i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = \lambda |u|^2 \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \quad (\text{NLS})$$

ただし、 u は (t, x) を変数とする複素数値の未知関数で $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とする。本講演では、以下の定理が成り立つことを紹介する。

定理 1 ([1]) $k > 1$ とする。ある時刻 $T \geq 0$ 、散乱状態 $u_+ \in H^{0,k}$ 、および (NLS) の解 $u \in C([T, \infty); L_x^2)$ で以下を満たすものが存在したとする。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - U(t)u_+\|_{L^2} = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} t^{1/4} \left(\int_t^\infty \|u(s) - U(s)u_+\|_{L_x^4}^4 ds \right)^{1/4} = 0.$$

このとき $u_+ \equiv 0$ である。

上記定理内の記号について説明する。

記号 1 $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ に対してフーリエ変換を $\hat{\psi}(\xi) = \mathcal{F}\psi(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) e^{-ix \cdot \xi} dx$ と定め、 $\psi \in \mathcal{S}'$ に対するフーリエ変換を $\hat{\psi}$ または $\mathcal{F}\psi$ と表す。

$m, s \in \mathbb{R}$ に対して重み付 Sobolev 空間 $H^{m,s}$ を

$$H^{m,s} = \left\{ \psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2); \|\psi\|_{H^{m,s}} = \left\| \left(1 + |x|^2\right)^{\frac{s}{2}} (1 - \Delta)^{\frac{m}{2}} \psi \right\|_{L^2} < \infty \right\}$$

と定める。ここで $(1 - \Delta)^{\frac{m}{2}} := \mathcal{F}^{-1} \left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{m}{2}} \mathcal{F}$ と定める。 $H^{m,0}$ のことを略して H^m と書く事にする。

$U(t) = e^{it\Delta/2}$ を Schrödinger 方程式の自由発展作用素を表す。つまり $v(t) = U(t)\phi$ は $i\partial_t v + \frac{1}{2}\Delta v = 0, v(0, x) = \phi(x)$ の解である。

参考文献

- [1] A. Shimomura and Y. Tsutsumi, *Nonexistence of scattering states for quadoratic nonlinear Schrödinger equations in two space dimensions*, Differential and Integral Equations 19(2006), 1047-1060

ホモトピー群、CW 近似、Eilenberg-MacLane 空間

@_ sappy _ (アンダーバーを前後に 2 個ずつ)

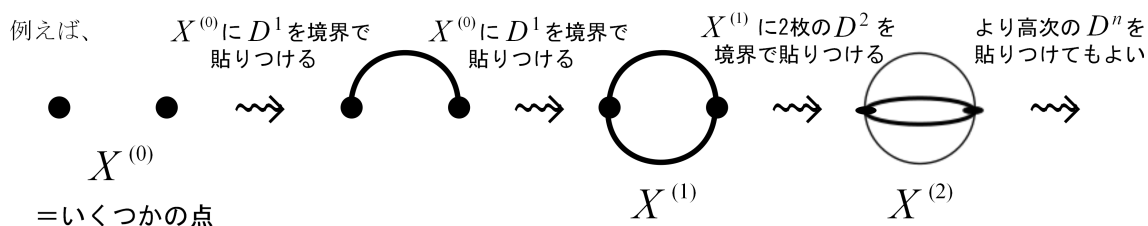
位相空間 X に対して、 X の情報を適度に持ち、かつ扱いやすい対象を手に入れることで X を調べる手段としたい。その 1 つが、連続写像 $S^n \rightarrow X$ たちのホモトピー類の集合 $\pi_n(X) := \{f: S^n \rightarrow X\} / \sim$ ホモトピーである (S^n は n 次元球面)。これには群の構造があって (積が定義されて)、 n 次のホモトピー群と呼ばれる。それらをまとめたもの

$$\pi_*(X) = \bigoplus_{n \geq 0} \pi_n(X)$$

を単にホモトピー群と言う。これは群であるので扱いやすく、しかも“普通”の空間に対しては十分な量の情報を持っている。

注意 1. $n \geq 2$ ではホモトピー群は可換群。また、弧状連結な空間を主に扱うので、その場合には $\pi_0(X) = 0$

非常に簡単な材料である球 D^{n+1} (及び、その境界である球面 S^n) を用いて、様々な空間を作れる。



このようにして作られた空間を CW 複体という。一般に連続写像 $f: X \rightarrow Y$ に対し、

$$f: \text{ホモトピー同値} \Rightarrow f_*: \pi_*(X) \rightarrow \pi_*(Y) \text{ が同型}$$

であるが、CW 複体についてはその逆が成立する。つまり、ホモトピー群の情報だけで空間のことが分かる。(上の“普通”とは CW 複体ということ。トートロジーな気もするが。) さらに任意の空間 X に対して、それと同じホモトピー群を持つ CW 複体 X' を作ることもできる (写像 $X' \rightarrow X$ 込みで)。これを CW 近似という。

また、ホモトピー論的に特に面白い空間がある。それは G : 可換群, $m \in \mathbb{N}$ として

$$\pi_n(K(G, m)) = \begin{cases} G & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

という空間 $K(G, m)$ で、Eilenberg-MacLane 空間と呼ばれる。この空間も CW 複体としてなら割と直観的に構成できる。

おまけ

ほとんど全ての空間は $S^n \hookrightarrow D^{n+1}$ の pushout を組み合わせて作れた (CW 複体) が、一方で $PK(G, n) \rightarrow K(G, n)$ の pullback を組み合わせても作れる ($PY = \{\ell: I \rightarrow Y \mid \ell(0) = *\}$ であり、 $D^{n+1} = S^n \times I / S^n \times \{0\}$ と対応している)。また、写像 $\alpha: X \rightarrow K(G, n)$ のホモトピー類は $H^n(X; G)$ の元と 1 対 1 に対応しており、ホモトピー群とコホモロジー群の間には不思議な関係がある。

本講演では、これらのことを概略的に説明し、感覚的な部分を理解してもらうことを目標としたい。

参考文献

選択公理をいかにして使ってしまうか

@alg_d <http://alg-d.com/math/ac/>

2012 年 09 月 09 日

今日扱うのは、TL でも何回か話題になった (した) こちらの定理です。

定理. 選択公理 $\iff$ 任意の非空集合 X に群構造を入れることができる

この定理の証明を通じて #選択公理ちゃんマジ公理 であることを伝えられればと思います。以下、この定理の証明で使う概念のうち、特に重要なものを上げておきます。

選択公理 1 (Axiom of Choice). #選択公理ちゃんマジ公理

非空集合からなる族 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して、ある写像 $f: \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ が存在して、全ての $\lambda \in \Lambda$ について $f(\lambda) \in X_\lambda$ となる。

定義. X と Y を集合とする。

1. $|X| \leq |Y| \iff$ 単射 $X \longrightarrow Y$ が存在する
2. $|X| = |Y| \iff$ 全単射 $X \longrightarrow Y$ が存在する
3. $|X| < |Y| \iff |X| \leq |Y|$ かつ $|X| \neq |Y|$

定義. $\mathcal{P}_{\text{fin}}(X) := \{A \subset X \mid A \text{ は有限集合}\}$

定義. 集合 X 上の順序関係 $\leq$ が次の性質を満たすとき、 $\leq$ を整列順序関係という。

任意の部分集合 $Y (\neq \emptyset) \subset X$ が最小元を持つ

命題 1. $(X, \leq_0)$ と $(Y, \leq_1)$ を整列順序集合とすると、 $X \times Y$ に順序関係 $\leq$ を辞書式順序で定める、即ち

$$(x, y) \leq (x', y') \iff x <_0 x' \text{ または } (x = x' \text{ かつ } y \leq_1 y')$$

と定義する。このとき $(X \times Y, \leq)$ は整列順序集合である。

命題 2. 任意の集合 X に対して、ある整列順序集合 $(W, \leq)$ が存在して、任意の $f: W \longrightarrow X$ は単射でない。

整列可能定理 (Well-Ordering Theorem).

任意の集合 X に対して、 X 上の整列順序関係が存在する。

L^p 空間の基底について

sir_zankel

キーワード：バナッハ空間, L^p 空間, 基底, フーリエ関数系, ウェーブレット関数系

必要となる知識：微分積分学, 線形代数学, フーリエ級数論の基礎的なこと (関数解析の基本的なことはその場で紹介したいと思います)

完備な位相を生成するノルムを備えた線形空間をバナッハ空間という. 主な興味は無限次元である. $\ell^p, C^r, C^{r,\alpha}, L^p, W^{p,k}, 1 \leq p \leq \infty, 0 < \alpha < 1, k \in \mathbf{N}$ などはその典型であり, 偏微分方程式論や確率論などにおいて, 関数解析的手法を利用するとき, よく登場する. ここでは, L^p 空間のもつ幾何構造, とくに基底について考える. 一般的な定義などからは始める.

・ B を可分バナッハ空間とする.

定義 B のシャウダー基底, 簡単に, 基底 $\{f_j\}_{j \in \mathbf{N}}$ とはつぎをみたす B の要素の可算系である: 任意の $f \in B$ に対して, つぎをみたす数列 $\{c_j\}$ が**ただ一つ**存在する:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{j=0}^N c_j f_j \right\|_B = 0$$

とくに, この極限が無条件で成り立つとき, $\{f_j\}_{j \in \mathbf{N}}$ は無条件基底と呼ばれる. 有限次元の場合, かならず基底をもつことはよく知られている. では, 無限次元の場合どうか. すなわち, こうである:

問題 一般的に B は基底をもつか.

よく知られているように, フーリエ関数系 $\{e_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$:

$$e_j(x) = e^{2\pi i j x}, \quad x \in [0, 1), j \in \mathbf{Z}$$

は $L^2([0, 1))$ の正規直交基底をなす. (したがって, 無条件基底である.) これを $[0, 1)$ だけではなく, $[k, k+1)$ の場合にも考えれば, $L^2(\mathbf{R}^1)$ の正規直交基底が得られる. では, 自然な一般化である $L^p(\mathbf{R}^d)$ 空間でもそれは基底をなすだろうか? より強く無条件だろうか? ここではこれらのことを調和解析の結果も踏まえつつ紹介したい.

秘書採用問題 end313124

秘書採用問題 #とは

以下のような条件のもとで一番良い秘書一人を採用するにはどうしたらよいか、を考える問題である。

条件 1

n 人の秘書が応募してきている。この n は既知の数字、もちろん正整数。

条件 2

応募者には 1 から n まで良さが決まっていて、複数の応募者が同順になることはない。つまり性格の良い不細工と性格の悪い美人の問題は発生しない。

条件 3

応募者は無作為な順序で一人ひとり面接を行う。

条件 4

一人一人の面接が終わった後にその応募者を採用するのかその場で決定する。採用したらその後の面接は無し。遡って採用することも認められない。

条件 5

応募者の採用基準は、条件 2 での良さのみによって決まる。サークルで人間関係をまとめていても、海外で貴重な経験をしても、バイトで仕事の大切さと責任を学んでも、残念ながら一切考慮されない。

条件 6

応募者の順位は今までの応募者との相対的な順位しか解らない。つまり、3 人目は 2 人目より良いが、1 人目よりは悪い。といった具合である。

この問題には、さまざまなバリエーションがある。たとえば、候補者を、恋人と、採用を結婚としても面白い。(ただこの場合 n が既知でない上に一度別れた恋人と復縁したりするかもしれない)

さてさて、この条件のもとで一番良い秘書 (あるいは恋人) を採用するためには、何をどうしたらよいだろう。

もちろんあてずっぽうにやったのでは、一番良い秘書を採用するなどまず不可能だろう。何らかのルールに基づいて採用を決めるのが圧倒的であると考えられる。

此处で考えるのは、”まず何人か様子見でスキップしてそのあと一番良い応募者が現れたら、その人を採用する。”というものである。

この ”何人見送るか ” の最適な値。そしてその最適な値での、一番良い秘書を採用できる確率について、なるたけわかりやすく、なるたけ楽しく考えてみる。

この問題は、現実にも応用可能である。生涯で縁のある女性数を適当に推定することで、一番良い結婚相手を見つけるためには何人との結婚 (交際?) を見送ればよいのか、などである。

まあぶっちゃけこんな打算的なことを考えている人は最適な結婚なんてできないんでしょうけれど。

無限ラムゼイの定理について

usb (@usb_usb)

V を空でない集合として, $[V]^2 = \{\{x, y\} : x, y \in V, x \neq y\}$ とする. この時, 次の (有限) ラムゼイの定理はよく知られている:

定理 1 (Ramsey). 任意の自然数 $k > 0$ に対して, 次を満たす自然数 $n > 0$ が存在する: 濃度が n 以上の任意の V と任意の $f : [V]^2 \rightarrow \{0, 1\}$ に対して, 濃度が k 以上の V の部分集合 H で $f|_{[H]^2}$ が定数をとる, つまり $f''[H]^2 = \{0\}$ か $f''[H]^2 = \{1\}$ となるものが存在する.

上のような H を (f の) **等質集合** と呼ぶ.

$\langle V, [V]^2 \rangle$ は V の元を頂点とする完全無向グラフとなり, この有限ラムゼイの定理はグラフ理論との関連からよく研究されているが, 今回の発表の前半ではこれの無限版である無限ラムゼイの定理 (の一バージョン) を紹介する:

定理 2 (Ramsey). 任意の無限集合 V と $f : [V]^2 \rightarrow \{0, 1\}$ に対して, V の (可算) 無限部分集合 H で $f|_{[H]^2}$ が定数をとるものが存在する.

さて, 上の定理により可算無限な等質集合は常に存在することが示されたが, 発表の後半では非可算な等質集合が存在するかどうかについて考えてみる.

一般に, V が非可算でも非可算な等質集合が常に得られるとは限らない:

定理 3. V を連続体濃度を持つ無限集合とすると, $f : [V]^2 \rightarrow \{0, 1\}$ で次を満たすものが存在する: V の任意の非可算無限部分集合 H に対して, $f|_{[H]^2}$ は定数をとらない.

また, V の濃度が連続体濃度より大きければ, 非可算無限な等質集合をとることができることを主張する Erdős-Rado の定理や, $V = \mathbb{R}$ のときでも f が位相的に良い性質を満たすときにはやはり非可算無限な等質集合をとることができることを主張する Galvin の定理なども紹介する (予定).

p 進数入門

平泉 政宗 @hrizm (from 関東地方)

2012-09-09

p 進数 (p -adic number) は, 1897 年にヘンゼル (Kurt Hensel) によって導入された, 整数全体 $\mathbb{Z}$ や有理数全体 $\mathbb{Q}$ を部分集合として含むが, 実数全体 $\mathbb{R}$ とは違う新たな数の世界である. もともとは複素解析における Laurent 展開とその極, 零点の位数の概念の類似を整数の世界で考えたもので, Laurent 展開の類似として p 進整数と p 進数を考えることができる. すなわち,

$$a_0 + a_1p + a_2p^2 + a_3p^3 + \cdots \\ a_{-k}p^{-k} + a_{-k+1}p^{-k+1} + \cdots + a_{-1}p^{-1} + a_0 + a_1p + \cdots$$

という無限和を考えることから出発する. ここで, 各 a_i は $0, 1, \dots, p-1$ までの値を取る, と定義していて, これが “ p 進数” という名前の由来となっている. また p 進整数全体の集合 $\mathbb{Z}_p$ および p 進数全体の集合 $\mathbb{Q}_p$ の理論は, 極と零点の位数の類似である付値という絶対値によく似た性質を示す概念によって支えられており, 上記の無限和を値として確定させるために, 通常 $\mathbb{Q}$ や $\mathbb{R}$ で考えている位相とは別の位相を導入する.

p 進数の世界はそこで起こる奇妙な現象や, 同時期に大きく発展した類体論の影響もあってか, Hensel が考案したばかりの頃はあまり注目されていなかったが, その後 Hensel の弟子であるハッセ (Helmut Hasse) の仕事により, 地位が確立した. 今回の講演ではこのうち, **Hasse-Minkowski の定理**を紹介する. この定理は方程式

$$ax^2 + by^2 = 1 \quad (a, b \in \mathbb{Q}, a, b \neq 0)$$

の有理数解を知るための大きな手がかりとなる重要な定理で, **局所大域原理** (Hasse 原理) の主要な結果のひとつである. また, p 進数の世界の上では解析学や幾何学を展開でき, それらの結果を取り入れることにより, 今や p 進数は数論の中でも特に重要な対象となっている.

p 進数には 3 つの同値な定義があり, それらに触れるために必要な前提知識を挙げておく: 環論 (直積環, 環準同型の定義くらいまで), 体論, 合同式, 位相空間論 (距離空間, 完備化など).

当日の発表では, p 進数の導入と諸性質の紹介, Hasse-Minkowski の定理の紹介を予定している.

参考文献

- [1] J. Neukirch(著), 足立恒雄 (監), 梅垣敦紀 (訳), “代数的整数論,” 丸善出版, 2012.
- [2] 加藤和也, 黒川信重, 斎藤毅, “数論 I Fermat の夢と類体論,” 岩波書店, 2005.
- [3] Neal Koblitz, “ p -adic Numbers, p -adic Analysis, and Zeta-Functions,” Springer, 1977.
- [4] J.P. Serre, “A Course in Arithmetic,” Springer, 1973.

デリバティブの価格決定理論と確率解析

榎本 拓実

数学は私たちの身の回りに溢れています。例えば、インターネット上で買い物をするときには個人情報や暗号化してやり取りをしています。この「暗号化」において数学が活躍しているのです。今回の講演では、このように数学が実社会で活躍する例の一つとして「オプションの価格決定理論」についてお話しします。

オプションとは金融派生証券（デリバティブ）の1つであり、大雑把に言えば「ある時刻における価値が、例えば株式や債権などの原資産のその時刻における価値によって決定する」という性質を持つ証券です。ヨーロッパ・コール・オプションというオプションを例にとりて説明しましょう。これは特定の時刻 T において価格 K で証券を購入する権利を与える契約（＝証券）です。時刻 T でのその証券の価格を S_T とすれば、このオプションの購入者の時刻 T での利益は $(S_T - K)^+$ となるので、このオプションの時刻 T での価値は $(S_T - K)^+$ です。実際 $S_T \leq K$ の場合はその証券を買う必要がなくなり、一方 $S_T \geq K$ の場合は権利を行使し価格 K で購入し、すぐに市場に売ればその差額分だけ利益が出るからです。

しかしこのオプションを売ると、販売者は時刻 T でこの証券を用意し価格 K で売ることになるかもしれないので、損を出してしまいます。そのために購入者からいくらかの金額を貰わなければなりません。それでは販売者はこのようなオプションをいくらで売べきでしょうか。

これを決定するために現代数学が使われています。より詳しくいえば、確率論、確率解析がここで活躍しているのです。

実際に価格の決定をするには、価格変動を表すモデルが必要です。そのモデルのひとつに Black-Scholes モデルがあります。Black-Scholes モデルとは株式や債権などの確率的な価格変動のある証券の価格 S_t が次の確率微分方程式

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

により定まるとしたモデルです。このモデルの下では、いくつかのオプションの価格は解析的に（数学的に厳密に）求めることができます。

今回の講演では確率解析の初歩と Black-Scholes モデルの下での価格決定理論について解説します。時間があれば他のオプションや数値計算による価格決定、あるいは最近のトピックなどにも触れる予定です。

この理論を（数学的に）厳密に理解しようとすると測度論、確率論、確率解析の知識が必要ですが、講演の内容を理解するには微積分学が理解できていれば十分かと思います。経済学の知識についても講演中に説明します。これから数学を学ぼうとする方にも是非聴いていただきたいです。

参考文献

- [1] R. J. Elliott and P. E. Kopp, *Mathematics of Financial Markets*, 2nd ed., Springer, New York, 2004.
- [2] N. Ikeda and S. Watanabe, *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, North Holland-Kodansha, Amsterdam, 1981.